



SOLICITACIONES LATERALES EN CHIMENEAS UNIFORMES. INFLUENCIA DEL AMORTIGUAMIENTO VISCOZO EN LA RESPUESTA

Raúl HUSID*
Juan MARCUS**

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia la influencia del amortiguamiento en la estimación de la respuesta de chimeneas uniformes cuya base es sometida a la acción de terremotos reales.

Se determinan expresiones exactas para el desplazamiento, esfuerzo de corte y momento de flexión en función de la posición, del tiempo y del número de modos de vibración considerados. Tanto el desplazamiento como el esfuerzo de corte y el momento de flexión exactos máximos fueron evaluados numéricamente para un número variable de modos de vibrar con el propósito de encontrar con qué rapidez convergen las series correspondientes.

Se estudió la posibilidad de estimar la respuesta exacta máxima mediante criterios de superposición modal, para lo cual se consideraron seis formas de superposición modal diferentes.

El estudio se realizó para chimeneas cuyo período fundamental toma tres valores dados y se obtuvo la respuesta de esas estructuras cuando se les sometía a la acción de tres terremotos reales. Además se consideraron varias distribuciones de los grados de amortiguamiento viscoso con el orden del modo.

Se concluye que la respuesta exacta, o sea el desplazamiento, el esfuerzo de corte y el momento de

*Decano de la Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso; Jefe Sección Ingeniería Sísmica, Departamento de Geofísica, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

**Ingeniero Civil, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso.

flexión, sufre una fuerte reducción al incrementarse el grado de amortiguamiento considerado. También se encuentra que las series convergen rápidamente: basta tomar, en general, dos términos de la serie para el desplazamiento, tres para el momento de flexión y cuatro para el esfuerzo de corte.

De las superposiciones modales estudiadas, se concluye que el criterio de superposición modal cuadrático S_1 es inadecuado cuando se considera la estructura no amortiguada, mejorando sensiblemente a medida que aumenta el grado de amortiguamiento. Cuando se consideran grados de amortiguamiento apreciables, no conviene emplear una combinación lineal de los criterios de superposición S_1 y S_2 , para estimar la respuesta de chimeneas sometidas a la acción de terremotos.

INTRODUCCION

Cada día se hace más necesario diseñar y construir chimeneas de gran altura o estructuras altas del tipo chimenea capaces de resistir, además del peso propio, los efectos producidos por terremotos, vientos, etc.

Aun cuando la respuesta de chimeneas sometidas a cargas laterales ha sido analizada por varios investigadores, poco se sabe cómo la afecta el mecanismo de amortiguación considerado^{1, 2, 3, 4, 5}.

El propósito de este trabajo es estudiar la respuesta de estructuras uniformes, con masa por unidad de largo μ constante, altura total H , deformables sólo por flexión, empotradas en la base, sometidas a la acción de un terremoto dado^{6, 7} y analizar cómo se modifican esas respuestas cuando se varía el grado de amortiguamiento viscoso considerado, por modo.

Hasta el presente no se ha considerado en forma explícita el efecto del amortiguamiento en el diseño sísmico debido a que no se conoce bien el mecanismo de amortiguación de las estructuras reales. Al diseñar las estructuras considerando amortiguamiento nulo, las sollicitaciones así obtenidas resultan mayores que cuando los grados de amortiguación viscosa se eligen mayores que cero.

Es sabido que el grado de amortiguación viscosa modifica sustancialmente la respuesta de estructuras sometidas a la acción de terremotos^{6, 7, 8, 9, 10} y resulta por ende de interés estudiar como se modifica la respuesta máxima de las estructuras consideradas cuando se introducen varios modelos matemáticos para representar el mecanismo de amortiguación.

En cada caso considerado, resulta atractivo verificar la posibilidad de estimar la respuesta máxima usando métodos de superposición modal^{4, 5, 11, 12, 13}.

Para edificios chilenos, construídos entre 1963 y 1970, se ha encontrado que el grado de amortiguamiento correspondiente al modo fundamental de vibración varía entre 0.5 y 7 por ciento¹⁴.

Aun cuando el artificio matemático utilizado en este trabajo para introducir el amortiguamiento conduce a una solución matemática conveniente, hay que destacar que físicamente es posible que no sea la forma más adecuada de definir el mecanismo de amortiguamiento.

ESTRUCTURA NO AMORTIGUADA

Ecuación diferencial del movimiento. Vibraciones libres

Se estudia una estructura elástica continua, deformable solo por flexión, de altura total H , sin amortiguamiento, sección transversal constante, módulo de elasticidad E y masa por unidad de largo μ , constantes. Se desprecia el efecto de la gravedad, se supone empotramiento perfecto en el extremo inferior y no se considera la interacción suelo estructura.

En la figura 1 se muestra el esquema de la estructura de altura H ; en la figura 2 se muestra un elemento de longitud infinitesimal dx , con módulo de elasticidad E y momento de inercia I (respecto al eje neutro de la sección perpendicular al plano formado por los ejes $x-y$).

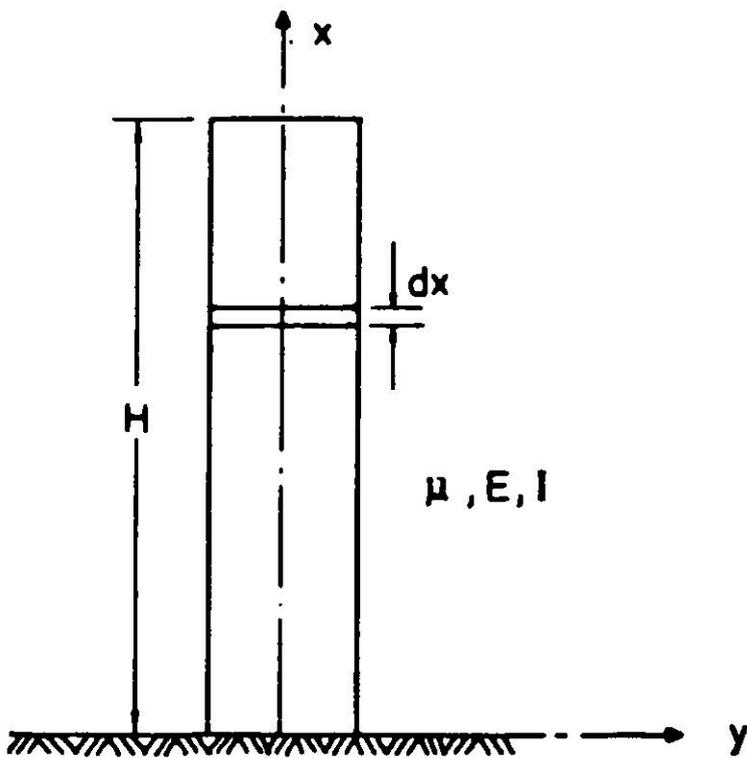


Fig. 1. Esquema de la estructura.

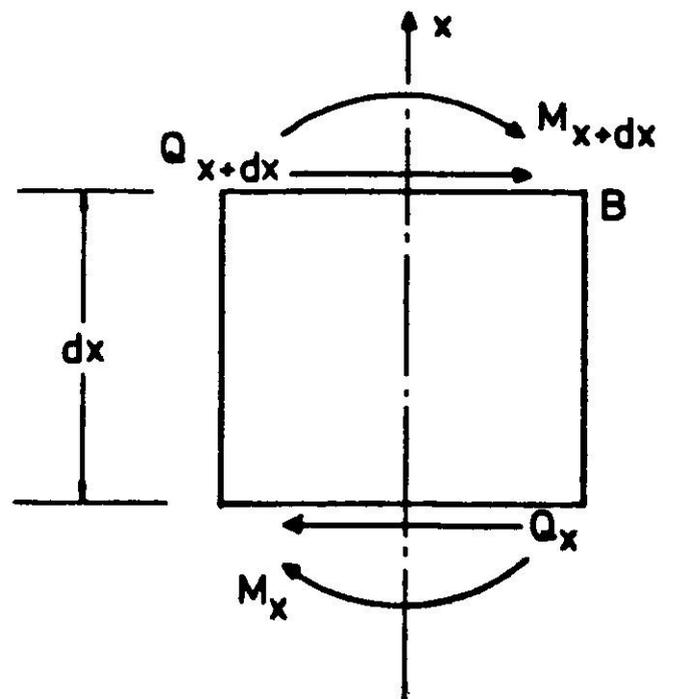


Fig. 2. Diagrama de solicitaciones de un elemento infinitesimal.

Se designa con M_x al momento de flexión en la cota x , con M_{x+dx} al momento de flexión en la cota $x+dx$ y con Q_x y Q_{x+dx} al esfuerzo de corte en las cotas x y $x+dx$.

Según la segunda ley de Newton se tiene:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Q_{x+dx} - Q_x$$

pero:

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$$

así resulta:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (1)$$

Evaluando la suma de momentos en torno al punto B (figura 2) se obtiene:

$$M_x + Q_x dx - M_{x+dx} = 0$$

pero:

$$M_{x+dx} = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$$

así se llega a:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (2)$$

Recordando que:

$$M_x = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

Empleando las ecuaciones 1, 2 y 3, se obtiene finalmente:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

y como tanto μ como EI se consideran constantes:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (4)$$

Resolución de la ecuación diferencial del movimiento. Modos normales

Sea la solución de la ecuación 4 del tipo:

$$y(x, t) = X(x) T(t) \quad (5)$$

donde $X(x)$ es función sólo de la posición y $T(t)$ es función del tiempo solamente.

Reemplazando la relación (5) en la ecuación (4), y dividiendo por $X(x) T(t)$, que es distinto de cero para algún x y t , se obtiene:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = - \frac{EI}{\mu} \frac{1}{X(x)} \frac{d^4 X(x)}{dx^4} = - \omega^2 \quad (6)$$

La ecuación (6) debe ser igual a una constante negativa, pues las deformaciones son finitas para tiempos infinitos.

De la relación 6 se obtiene:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \frac{\mu \omega^2}{EI} X(x) = 0 \quad (7)$$

Esta ecuación diferencial de cuarto orden tiene la solución:

$$X(x) = B_1 (\text{sen} px - \text{senh} px) + B_2 (\text{sen} px + \text{senh} px) + B_3 (\text{cosp} x - \text{cosh} px) + B_4 (\text{cosp} x + \text{cosh} px)$$

donde:

$$p^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$$

y

B_1, B_2, B_3 y B_4 son constantes.

Con las condiciones de contorno:

$$y(0, t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=H} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=H} = 0$$

se encuentra que $B_2 = B_4 = 0$, además:

$$\begin{aligned} B_1 (-\text{sen} pH - \text{senh} pH) - B_3 (\text{cosp} H + \text{cosh} pH) &= 0 \\ B_1 (-\text{cosp} H - \text{cosh} pH) - B_3 (-\text{sen} pH + \text{senh} pH) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

El sistema de ecuaciones (8) sólo tiene solución distinta de la trivial si su determinante vale cero. De aquí se obtiene la ecuación característica:

$$\text{cosp} H \cdot \text{cosh} pH = -1 \quad (9)$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, o sea, infinitos valores de pH que corresponden a los infinitos modos de vibrar del sistema. De aquí en adelante se

hablará de $p_n x$ o $p_n H$, en que n indica el n -ésimo modo de vibrar.

Para los 10 primeros modos, evaluados en el computador IBM-360 de la Universidad de Chile, los valores obtenidos que cumplen con la ecuación 9 son los siguientes:

$$\begin{aligned} p_1 H &= 1.8751041 \\ p_2 H &= 4.6940911 \\ p_3 H &= 7.8547574 \\ p_4 H &= 10.9955407 \\ p_5 H &= 14.1371684 \\ p_6 H &= 17.2787593 \\ p_7 H &= 20.4203523 \\ p_8 H &= 23.5619449 \\ p_9 H &= 26.7035376 \\ p_{10} H &= 29.8451302 \end{aligned}$$

Para modos superiores se puede usar, con bastante aproximación:

$$p_n H = p_{n-1} H + \pi \quad (n \geq 5)$$

De cualesquiera de las dos ecuaciones del sistema (8) se puede calcular el cociente entre las constantes B_3 y B_1 . Así, se puede escribir:

$$E_n = \frac{B_3^n}{B_1^n} = \frac{\cos p_n H + \cosh p_n H}{\sin p_n H - \sinh p_n H}$$

que es constante para un modo de vibrar dado.

Finalmente, la función que depende sólo de la posición tiene la forma:

$$X_n(x) = B_1^n \{(\sin p_n x - \sinh p_n x) + E_n (\cos p_n x - \cosh p_n x)\} \quad (10)$$

para los n modos de vibrar ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Vibraciones forzadas

A continuación se estudia la respuesta de chimeneas uniformes, cuya base se mueve durante un terremoto. Empleando nuevamente la segunda ley de Newton, se tiene:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{d^2 Z}{dt^2} = - \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (11)$$

donde:

$Z(t)$ es el desplazamiento del suelo durante el temblor.

Se supone una solución general de la forma:

$$y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (12)$$

donde $X_n(x)$ aparece dado por la relación 10.

Haciendo $d^2 Z/dt^2 = -F(t)$ y reemplazando la relación (12) en la ecuación (11), se llega a:

$$\frac{EI}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} = F(t) \quad (13)$$

Además, reemplazando la ecuación (7) en la expresión anterior, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left(\frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 T_n(t) \right) = F(t) \sum_{n=1}^{\infty} R_n X_n(x) \quad (14)$$

donde se cumple, idénticamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n X_n(x) = 1 \quad (15)$$

y además, R_n es una constante cuyo valor es determinado más adelante.

Introducción del amortiguamiento. Respuesta de la chimenea

Considerando que se desconoce el verdadero mecanismo de amortiguación que poseen las estructuras y pensando en la posibilidad de estudiar la influencia que el amortiguamiento puede tener sobre la respuesta de ellas, se decidió considerar varias expresiones para definir los grados de amortiguamiento viscoso por modo de vibración. Los valores considerados de c/c_c se dan más adelante.

Incluyendo amortiguamiento viscoso y tomando en cuenta lo recién mencionado, se puede escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left\{ \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} + 2\xi_n \omega_n \frac{dT_n(t)}{dt} + \omega_n^2 T_n(t) \right\} = F(t) \sum_{n=1}^{\infty} R_n X_n(x) \quad (16)$$

$$\text{donde } \xi_n = (c/c_c)_n$$

Multiplicando la relación (16) por $X_r(x)$ e integrando entre 0 y H , y recordando la relación de ortogonalidad, se obtiene:

$$\frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} + 2\xi_n \omega_n \frac{dT_n(t)}{dt} + \omega_n^2 T_n(t) = F(t) R_n \quad (17)$$

Para encontrar el valor de R_n basta multiplicar la ecuación (15) por $X_r(x)$ ($r \neq n$) e integrar entre 0 y H . Así, empleando la condición de ortogonalidad se llega a:

$$R_n = \frac{\int_0^H X_n(x) dx}{\int_0^H X_n^2(x) dx} \quad (18)$$

La solución de la ecuación (17), para condiciones iniciales nulas, está dada por:

$$T_n(t) = \frac{R_n}{q_n} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi_n \omega_n(t-\tau)} \text{sen } q_n(t-\tau) d\tau \quad (19)$$

donde:

$$q_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

Introduciendo la expresión $D_n(t)$, como sigue:

$$D_n(t) = \frac{1}{q_n} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi_n \omega_n(t-\tau)} \text{sen } q_n(t-\tau) d\tau$$

se puede escribir:

$$T_n(t) = R_n D_n(t)$$

De esta manera, la expresión del desplazamiento en función de la posición y del tiempo puede escribirse como sigue:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) D_n(t) R_n \quad (20)$$

donde $X_n(x)$ está dado por la relación (10) y R_n por la relación (18).

Momento de flexión y esfuerzo de corte

Para encontrar la expresión del momento de flexión bastará reemplazar la ecuación (20) en la relación (3), obteniéndose así:

$$M(x, t) = -EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} D_n(t) R_n \quad (21)$$

dado que se ha supuesto EI constante.

Análogamente, empleando las ecuaciones (2) y (21), se obtiene la serie infinita que permite evaluar el esfuerzo de corte:

$$Q(x, t) = -EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3 X_n(x)}{dx^3} D_n(t) R_n \quad (22)$$

donde:

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -B_1^n p_n^2 \left\{ (\text{sen} p_n x + \text{senh} p_n x) + E_n (\text{cosp}_n x + \text{cosh} p_n x) \right\}$$

$$\frac{d^3 X_n(x)}{dx^3} = -B_1^n p_n^3 \left\{ (\text{cosp}_n x + \text{cosh} p_n x) + E_n (-\text{sen} p_n x + \text{senh} p_n x) \right\}$$

Si se observan las sumatorias que permiten calcular el desplazamiento, momento de flexión y esfuerzo de corte, se encuentra que en los tres casos la respuesta correspondiente al modo de orden n contiene R_n . A continuación se calculará esa constante.

Empleando la relación (10) y luego de realizar la integración indicada, se encuentra:

$$\int_0^H X_n(x) dx = \frac{2 B_1^n}{p_n} \quad (23)$$

La masa equivalente correspondiente al modo de orden n de una chimenea uniforme está dada por (1):

$$M_n = \mu \frac{\left(\int_0^H X_n(x) dx \right)^2}{\int_0^H X_n^2(x) dx} \quad (24)$$

De la ecuación anterior se encuentra:

$$\int_0^H X_n^2(x) dx = \frac{\mu}{M_n} \left(\int_0^H X_n(x) dx \right)^2 \quad (25)$$

Reemplazando la relación (25) en la definición de R_n , se tiene:

$$R_n = \frac{M_n}{\mu \int_0^H X_n(x) dx}$$

Introduciendo el valor del denominador, obtenido en la expresión (23), se concluye:

$$R_n = \frac{p_n H}{2 B_1^n} \cdot \frac{M_n}{m} \quad (26)$$

donde se ha empleado la notación:

$$m = \mu H$$

La ecuación (26) permite conocer R_n siempre que las masas equivalentes sean conocidas. Empleando la relación (24) que las define, y después de algunas reducciones, se encuentra:

$$\frac{M_n}{m} = \left(\frac{2 (\operatorname{sen} p_n H - \operatorname{senh} p_n H)}{(p_n H) (\operatorname{sen} p_n H \cdot \operatorname{senh} p_n H)} \right)^2 \quad (27)$$

A continuación se entregan las masas equivalentes para los diez primeros modos de vibrar, como fracción de la masa total de la chimenea:

$$\frac{M_1}{m} = 0.61307610$$

$$\frac{M_2}{m} = 0.18830037$$

$$\frac{M_3}{m} = 0.06473223$$

$$\frac{M_4}{m} = 0.03308689$$

$$\frac{M_5}{m} = 0.02001400$$

$$\frac{M_6}{m} = 0.01339784$$

$$\frac{M_7}{m} = 0.00959254$$

$$\frac{M_8}{m} = 0.00720506$$

$$\frac{M_9}{m} = 0.00560948$$

$$\frac{M_{10}}{m} = 0.00449069$$

Vale la pena destacar que las masas correspondientes a los diez primeros modos de vibración alcanzan al 95,95 % de la masa total.

Para encontrar los distintos períodos T_n de oscilación de la estructura resulta simple demostrar que se cumple la relación siguiente:

$$T_n \sqrt{EI} = \frac{2\pi H^2 \sqrt{\mu}}{(p_n H)^2} \quad (28)$$

Con el objeto de obtener expresiones adimensionales para el desplazamiento, momento de flexión y esfuerzo de corte, en este trabajo se evalúan las expresiones siguientes:

Para el desplazamiento:

$$\frac{EI}{g\mu H^4} y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\text{sen } p_n x - \text{senh } p_n x) + E_n (\text{cos } p_n x - \text{cosh } p_n x) \right\} D_n(t) \beta_n \quad (29)$$

Para el momento de flexión:

$$\frac{M(x, t)}{g\mu H^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\text{sen } p_n x + \text{senh } p_n x) + E_n (\text{cos } p_n x + \text{cosh } p_n x) \right\} \frac{D_n(t)}{\rho_n} \quad (30)$$

Para el esfuerzo de corte:

$$\frac{Q(x, t)}{g\mu H} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\text{cos } p_n x + \text{cosh } p_n x) + E_n (\text{senh } p_n x - \text{sen } p_n x) \right\} \frac{D_n(t)}{\psi_n} \quad (31)$$

donde se tiene:

$$\beta_n = 2 (p_n H)^3 \frac{m}{M_n} \omega_n$$

$$\rho_n = 2 (p_n H) \frac{m}{M_n} \omega_n$$

$$\psi_n = 2 \frac{m}{M_n} \omega_n$$

Elección de la sollicitación lateral

En el presente trabajo se ha determinado la respuesta de cada una de las chimeneas consideradas para los siguientes terremotos reales, digitalizados en la Sección Ingeniería Sísmica del Departamento de Geofísica de la Universidad de Chile:

- 1) Terremoto Vernon, ocurrido el 2 de Octubre de 1933, componente N 8 E, (U.S.A.)
- 2) Terremoto Lima, ocurrido el 24 de Enero de 1957, componente N 82 W, (Perú)
- 3) Terremoto Eureka, ocurrido el 10 de Diciembre de 1967, componente N 79 E, (U.S.A.)

Todos estos terremotos tienen en común el estar digitalizados, a intervalos de tiempo desiguales.

Las características ingenieriles fundamentales de los tres terremotos recién mencionados han sido estudiadas por el primero de los autores de este trabajo.⁷

Estructuras consideradas

Las chimeneas utilizadas se seleccionaron sin dar un valor numérico a cada uno de los parámetros que la definen, sino que se eligió el período del modo fundamental (T_1), de modo que el rango de períodos cubriese en forma adecuada los valores obtenidos experimentalmente para chimeneas altas.

Los períodos fundamentales de las estructuras consideradas son: 2.0 s; 4.0 s; y 6.0 s.

Esta elección impone una condición que deben satisfacer E , I , μ y H , según se desprende de la relación (28) al emplearla para $n = 1$:

$$\frac{T_n}{T_1} = \left(\frac{p_1 H}{p_n H} \right)^2 \quad (32)$$

En esta forma, los períodos de todos los modos de vibración quedan determinados una vez que se elige el período fundamental.

La respuesta de las chimeneas fue determinada considerando los diez primeros modos de vibración. Los grados de amortiguación viscosa para los modos considerados fueron los siguientes:

- a) $\xi_n = 0.0$ ($n = 1, 2, \dots 10$)
- b) $\xi_n = 0.01$ ($n = 1, 2, \dots 10$)
- c) $\xi_n = 0.02$ ($n = 1, 2, \dots 10$)
- d) $\xi_n = 0.10$ ($n = 1, 2, \dots 10$)
- e) $\xi_n = 0.01 n$ ($n = 1, 2, \dots 10$)
- f) $\xi_n = 0.11 - 0.01 n$ ($n = 1, 2, \dots 10$)
- g) $\xi_n = 0.005 n$ ($n = 1, 2, \dots 10$)
- h) $\xi_n = 0.055 - 0.005 n$ ($n = 1, 2, \dots 10$)

Métodos de superposición modal

Las expresiones desarrolladas anteriormente dan la respuesta exacta teórica para el desplazamiento, momento de flexión y esfuerzo de corte de una estructura continua, deformable solo por flexión, sometida a la acción de un terremoto dado como función del tiempo y de la posición. Para obtener estos valores el ingeniero tendría que contar con un computador, lo que generalmente resulta antieconómico. Por este motivo se trata de obtener fórmulas lo más aproximadas posibles que permitan evaluar en forma simple la respuesta de las estructuras sometidas a la acción de terremotos.

Las normas de diseño sísmico permiten estimar la respuesta de estructuras sometidas a terremotos, usando el Análisis Dinámico Modal¹⁵. La respuesta se evalúa mediante criterios de superposición modal, que consisten en combinar las contribuciones modales máximas de acuerdo a ciertas técnicas.

Se estudia la posibilidad de estimar la respuesta exacta máxima mediante

criterios de superposición modal. Esto se hace determinando dichas estimaciones mediante seis formas de superposición modal diferentes.

El primer método de superposición aquí considerado consiste en evaluar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas exactas modales máximas, o sea:

$$S_1 = \sqrt{\sum S_i^2}$$

El segundo criterio de superposición utilizado consiste en sumar las contribuciones máximas modales en valor absoluto, o sea:

$$S_2 = \sum |S_i|$$

Este método proporciona una cota superior para la respuesta exacta. La tercera forma es el promedio de las anteriores, es decir:

$$S_3 = (S_1 + S_2)/2$$

La cuarta, propuesta por Rosenblueth¹¹, es algo más complicada:

$$S_4 = \sqrt{\sum_{i \neq j} \sum \frac{S_i S_j}{1 + \epsilon_{ij}^2} + \sum S_i^2}$$

donde:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\xi'_i \omega_i + \xi'_j \omega_j}$$

$$\xi'_i = \xi_i + \frac{2}{\omega_i s}$$

s = duración del sismo en segundos.

s = duración del sismo en segundos.

Los dos últimos métodos de superposición modal considerados son combinaciones de los dos primeros:

$$S_5 = a S_2 + (1 - a) S_1$$

y

$$S_6 = \sqrt{\gamma S_2^2 + (1 - \gamma) S_1^2}$$

donde las constantes a y γ son evaluadas mediante el método de los cuadrados mínimos.

Todos estos métodos de superposición fueron utilizados considerando los diez primeros modos de vibrar.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Para todos los casos resultantes de utilizar los terremotos enumerados, los tres períodos fundamentales considerados y las diversas distribuciones del grado de amortiguamiento con el modo, recién mencionados, se obtuvo la respuesta exacta, o sea desplazamiento, momento de flexión y esfuerzo de corte como función de la posición, del tiempo y para un número variable de modos normales de vibración. Esto permitió estudiar, en todos los casos, el mínimo número de modos normales de vibrar necesarios para estimar con bastante aproximación la respuesta exacta considerada.

La integración en el tiempo se transformó en una sumatoria después de suponer una variación lineal del acelerograma entre dos puntos consecutivos de la digitalización.

En la tabla I se indica, para los casos más desfavorables, el número mínimo de modos necesarios para estimar la respuesta exacta con suficiente aproximación, como función del mecanismo de amortiguación considerado. Se observa que la convergencia de las series es más rápida cuando se aumenta el grado de amortiguación viscosa escogido.

TABLA I
NUMERO MINIMO DE MODOS

Tipo de amortiguación	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Desplazamiento	3	2	2	2	2	2	2	2
Momento de flexión	4	4	4	3	4	4	3	4
Esfuerzo de corte	5	5	4	3	4	4	3	4

En todos los casos considerados se determinó cada una de las estimaciones de la respuesta enumeradas en el párrafo anterior de este trabajo con el propósito de investigar la posibilidad de sugerir la utilización de algún criterio simple de superposición modal para estimar la respuesta de chimeneas sometidas a la acción de terremotos.

En las Figs. 6 a 8, 12 a 14, ..., 54 a 56, se presentan los resultados expresados como función de la respuesta exacta para todos los casos considerados. Se hace notar que en dichas figuras solamente se han dibujado los resultados obtenidos al utilizar tres de los seis criterios de superposición modal antes mencionados, S_1 , S_2 , y S_3 . Esto se hizo así, debido a que los resultados obtenidos con el criterio de superposición S_4 son prácticamente coincidentes con los obtenidos con el criterio de superposición S_1 . Además se observó que las constantes α y γ , que aparecen en los criterios S_5 y S_6 respectivamente, varían con el grado de amortiguamiento pasando de positivos para el caso no amortiguado a valores negativos cuando aumenta el

Terremoto Vernon. Octubre 1933 (N 8 E). T_1 : 2.0 segundos
 $\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

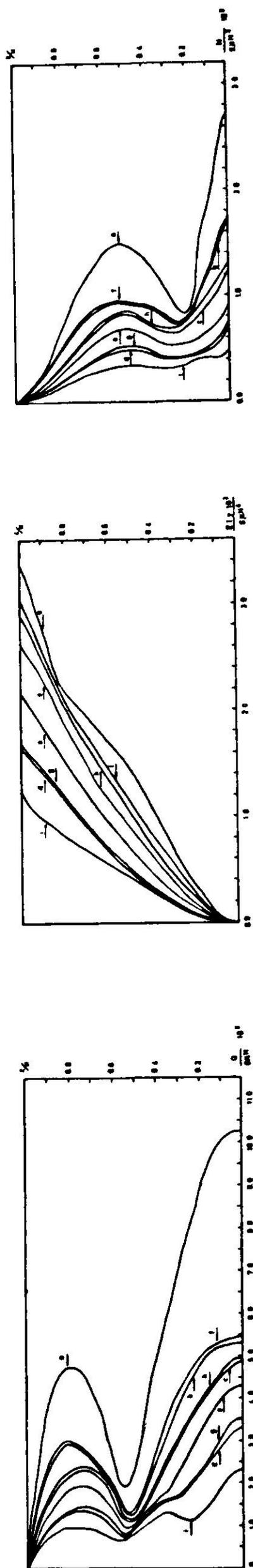


Fig. 3. Esfuerzo de corte.

Fig. 4. Desplazamiento.

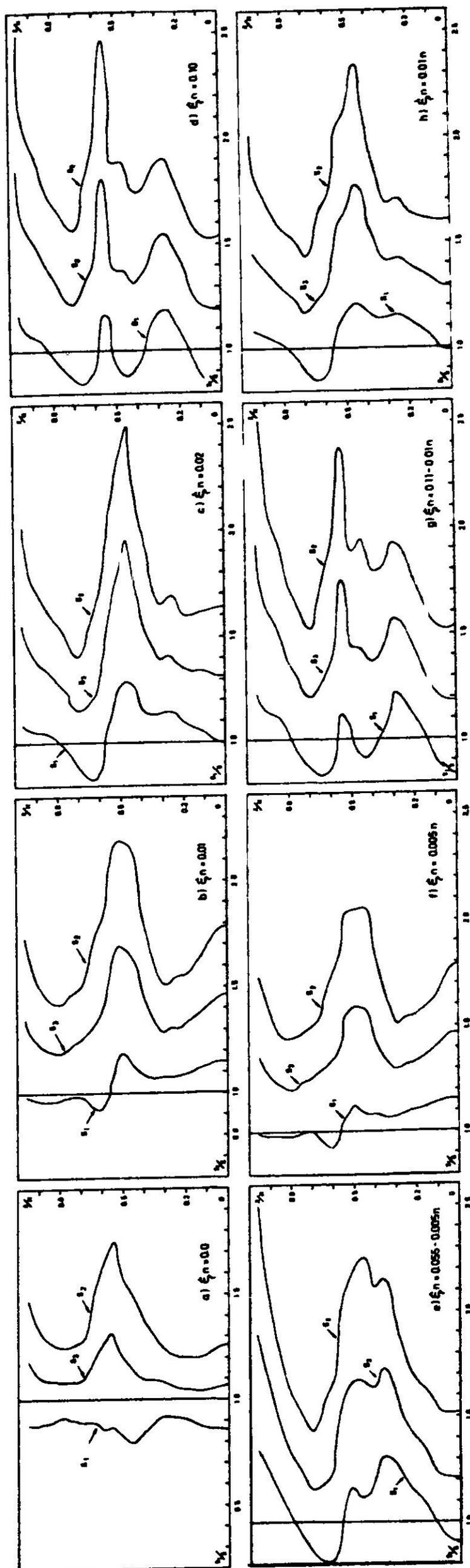


Fig. 5. Momento de flexión.

Fig. 6. Superposiciones modales relativas. Esfuerzo de corte.

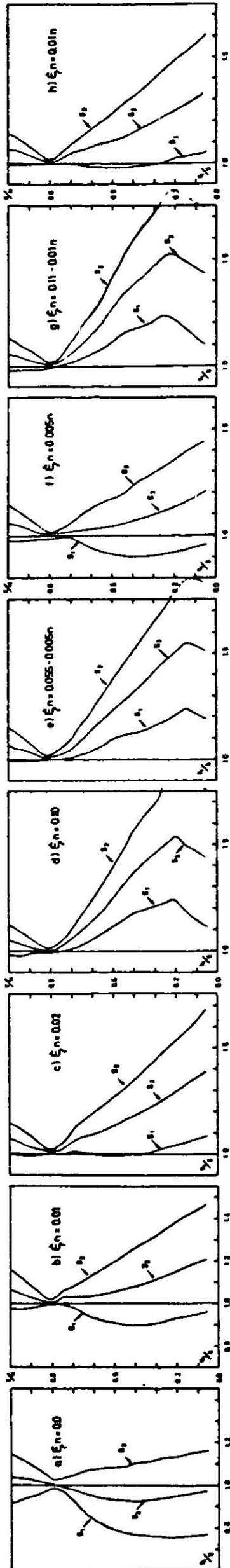


Fig. 7. Superposiciones modales relativas. Desplazamiento.

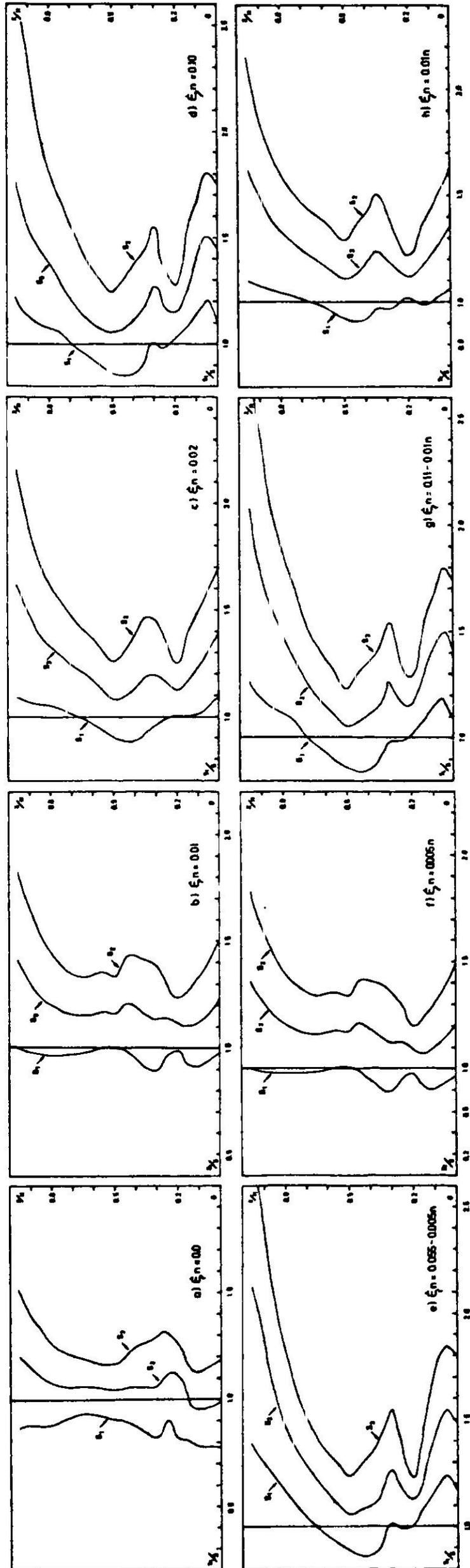


Fig. 8. Superposiciones modales relativas. Momento de flexión.

Terremoto Lima. Enero 1957 (N 82 W). T_1 : 2.0 segundos
 $\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

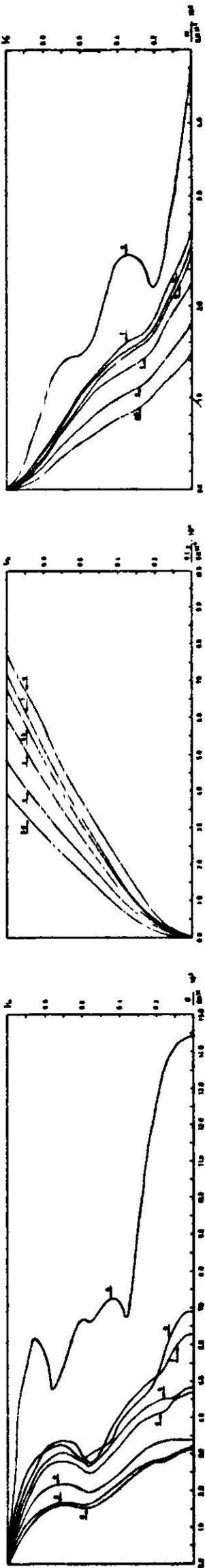


Fig. 9. Esfuerzo de corte.

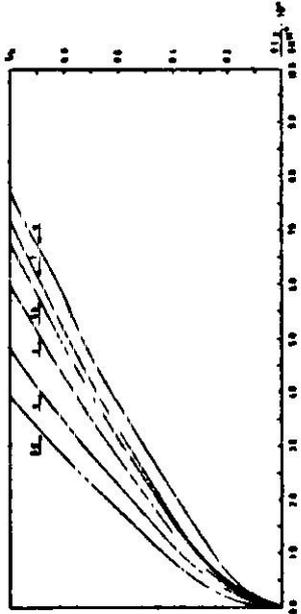


Fig. 10. Desplazamiento.

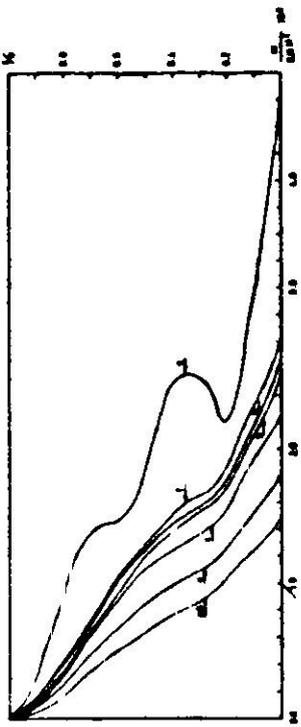


Fig. 11. Momento de flexión.

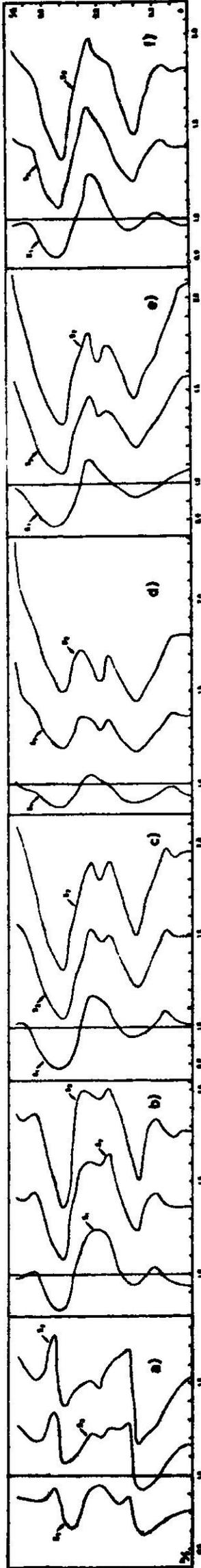


Fig. 12. Superposiciones modales relativas.
Esfuerzo de corte.

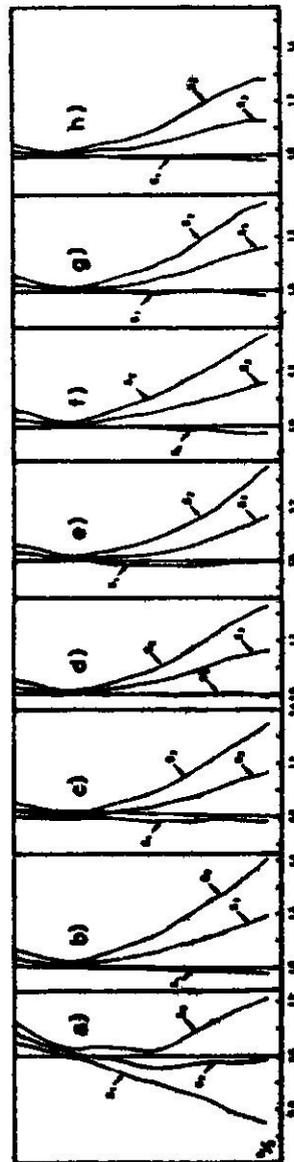


Fig. 13. Superposiciones modales relativas.
Desplazamiento.

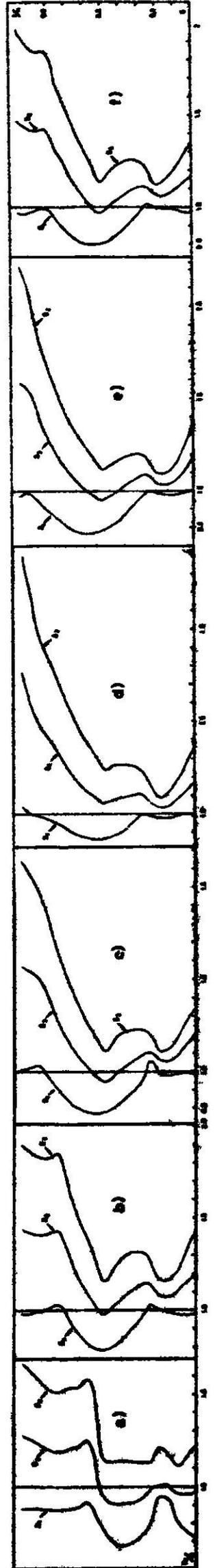


Fig. 14. Superposiciones modales relativas.
Momento de flexión.

Terremoto Eureka. Diciembre 1967 (N 79 E). T_1 : 2.0 segundos

$\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

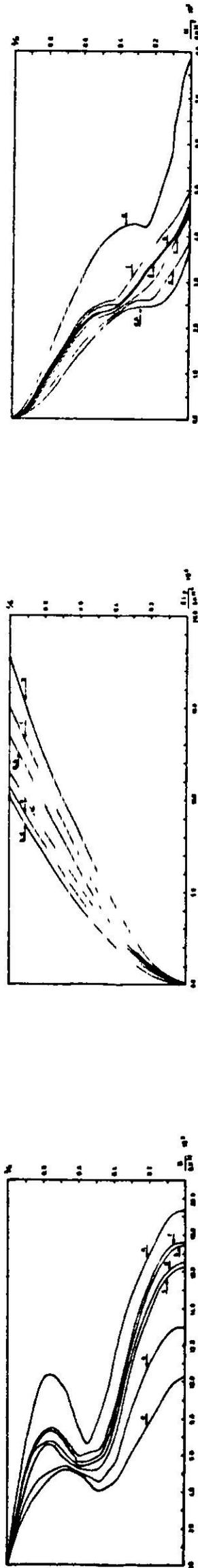


Fig. 15. Esfuerzo de corte.

Fig. 16. Desplazamiento.

Fig. 17. Momento de flexión.

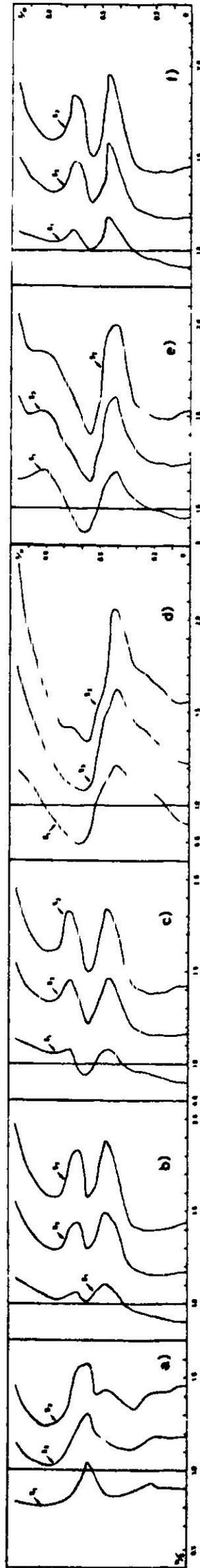


Fig. 18. Superposiciones modales relativas.
Esfuerzo de corte.

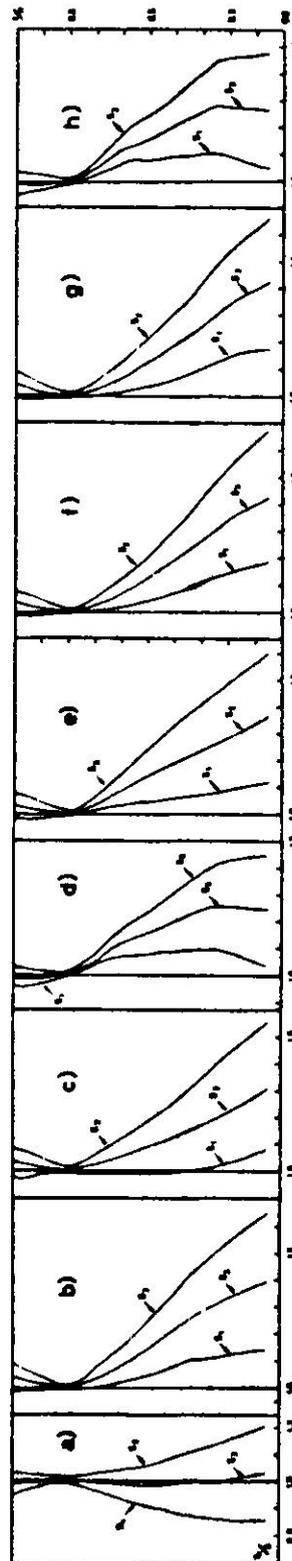


Fig. 19. Superposiciones modales relativas.
Desplazamiento.

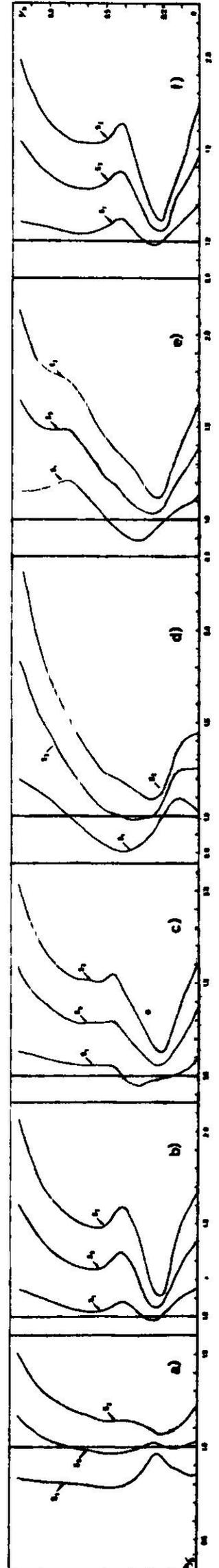


Fig. 20. Superposiciones modales relativas.
Momento de flexión.

Terremoto Vernon. Octubre 1933 (N 8 E). T_1 : 4.0 segundos

$\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

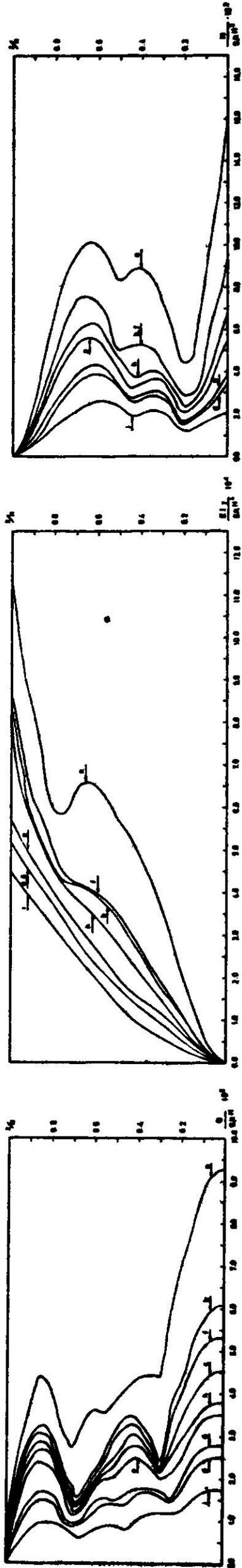


Fig. 21. Esfuerzo de corte.

Fig. 22. Desplazamiento.

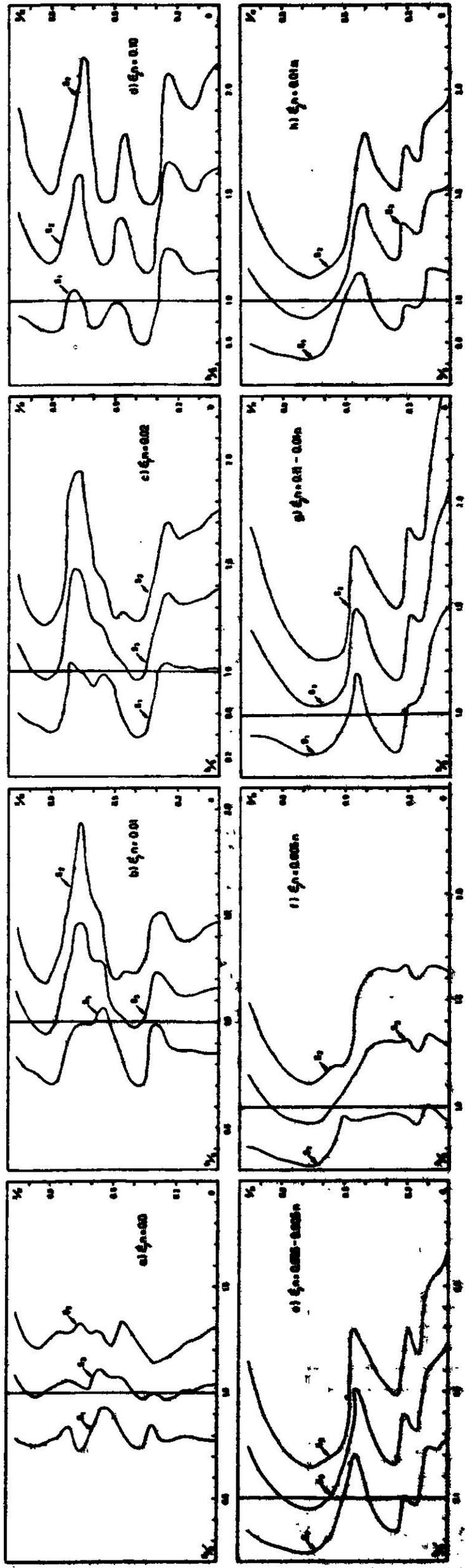


Fig. 23. Momento de flexión.

Fig. 24. Superposiciones modales relativas. Esfuerzo de corte.

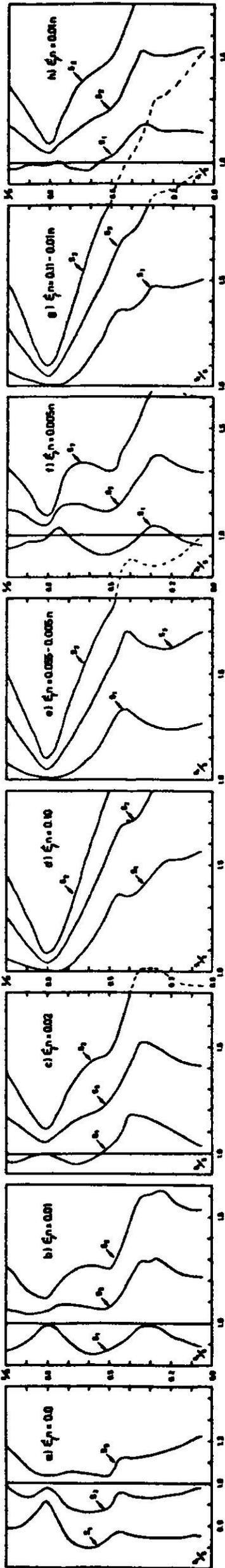


Fig. 25. Superposiciones modales relativas. Desplazamiento.

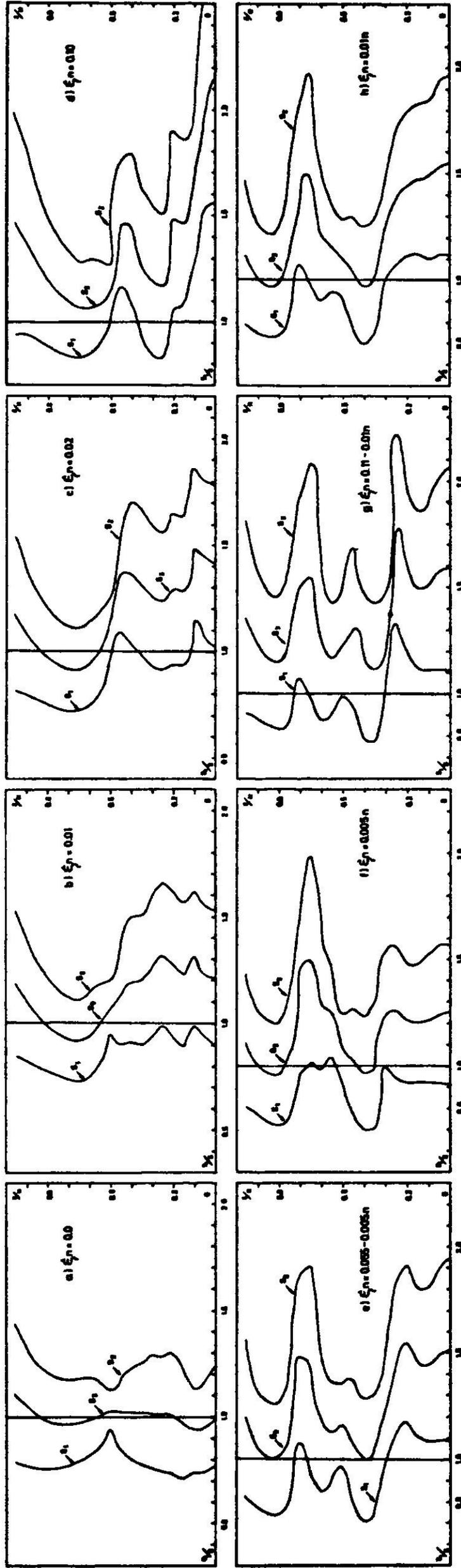


Fig. 26. Superposiciones modales relativas. Momento de flexión.

Terremoto Lima. Enero 1957 (N 82 W). T_1 : 4.0 segundos

$\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

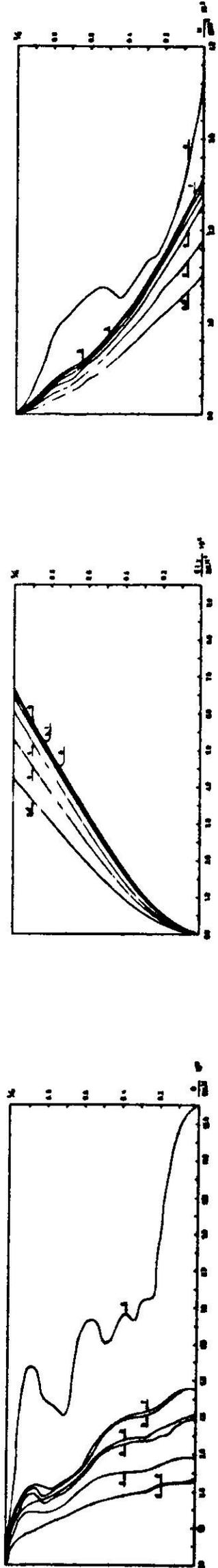


Fig. 27. Esfuerzo de corte.

Fig. 28. Desplazamiento.

Fig. 29. Momento de flexión.

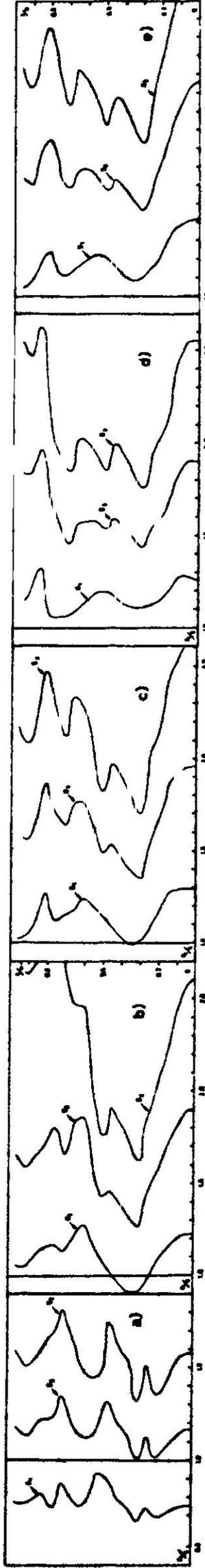


Fig. 30. Superposiciones modales relativas.
Esfuerzo de corte.

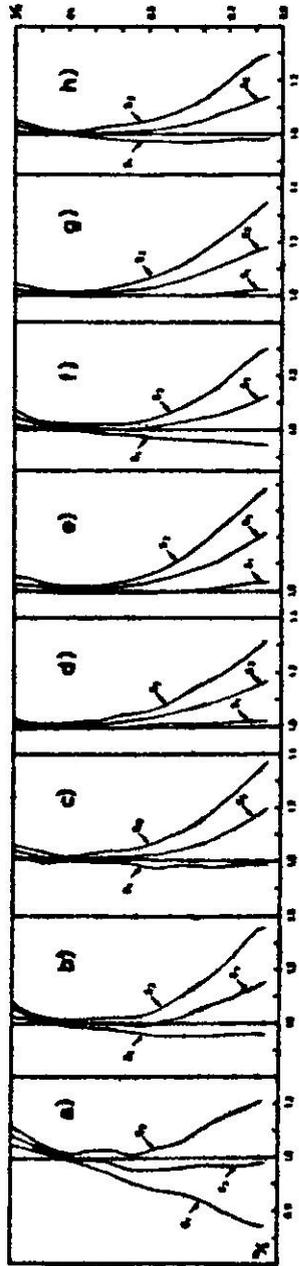


Fig. 31. Superposiciones modales relativas.
Desplazamiento.

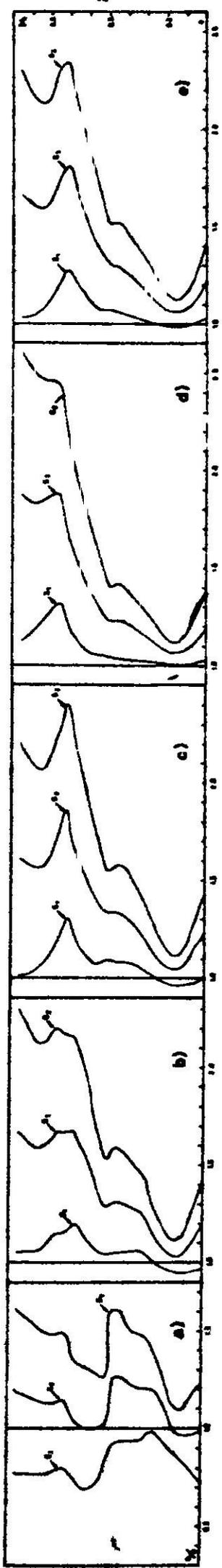


Fig. 32. Superposiciones modales relativas.
Momento de flexión.

Terremoto Eureka. Diciembre 1967 (N 79 E). T_1 : 4.0 segundos

$\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

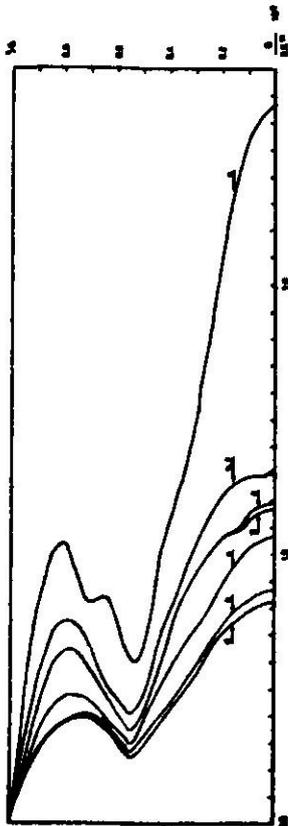


Fig. 33. Esfuerzo de corte.

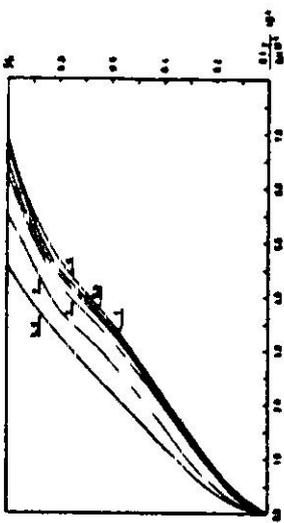


Fig. 34. Desplazamiento.

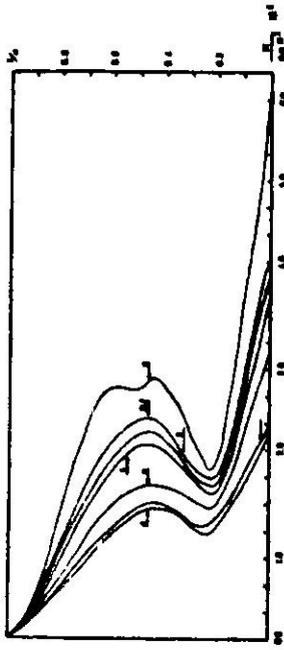


Fig. 35. Momento de flexión.

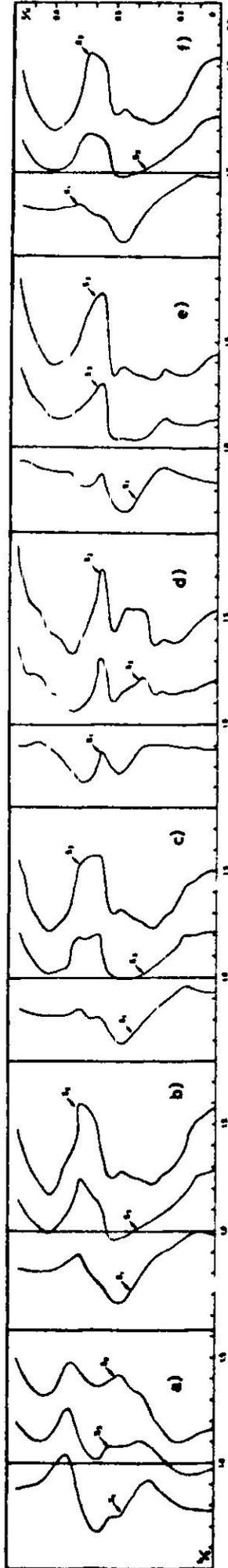


Fig. 36. Superposiciones modales relativas. Esfuerzo de corte.

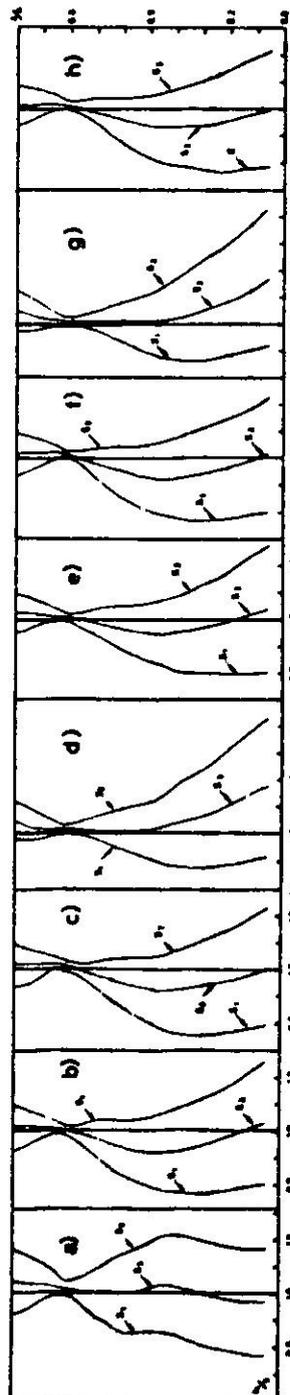


Fig. 37. Superposiciones modales relativas. Desplazamiento.

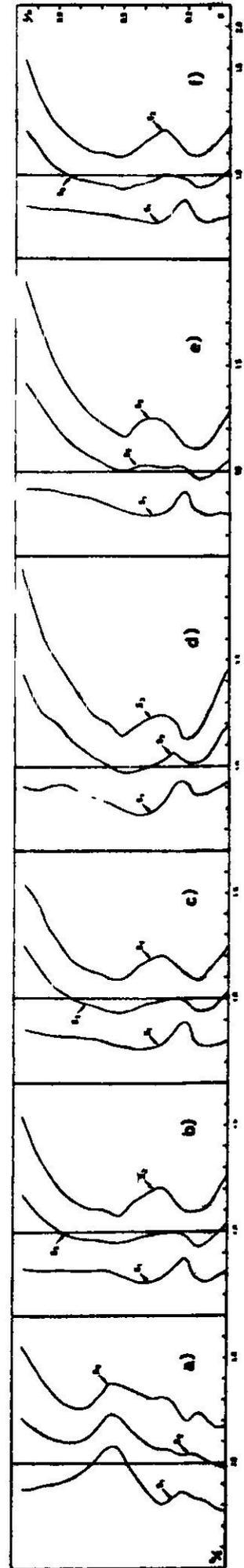


Fig. 38. Superposiciones modales relativas. Momento de flexión.

Terremoto Vernon, Octubre 1933 (N 8 E). T_1 : 6.0 segundos
 $\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

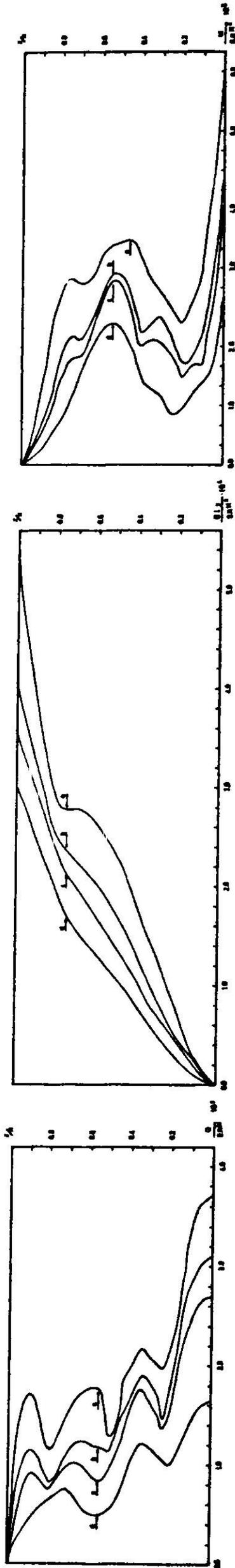


Fig. 39. Esfuerzo de corte.

Fig. 40. Desplazamiento.

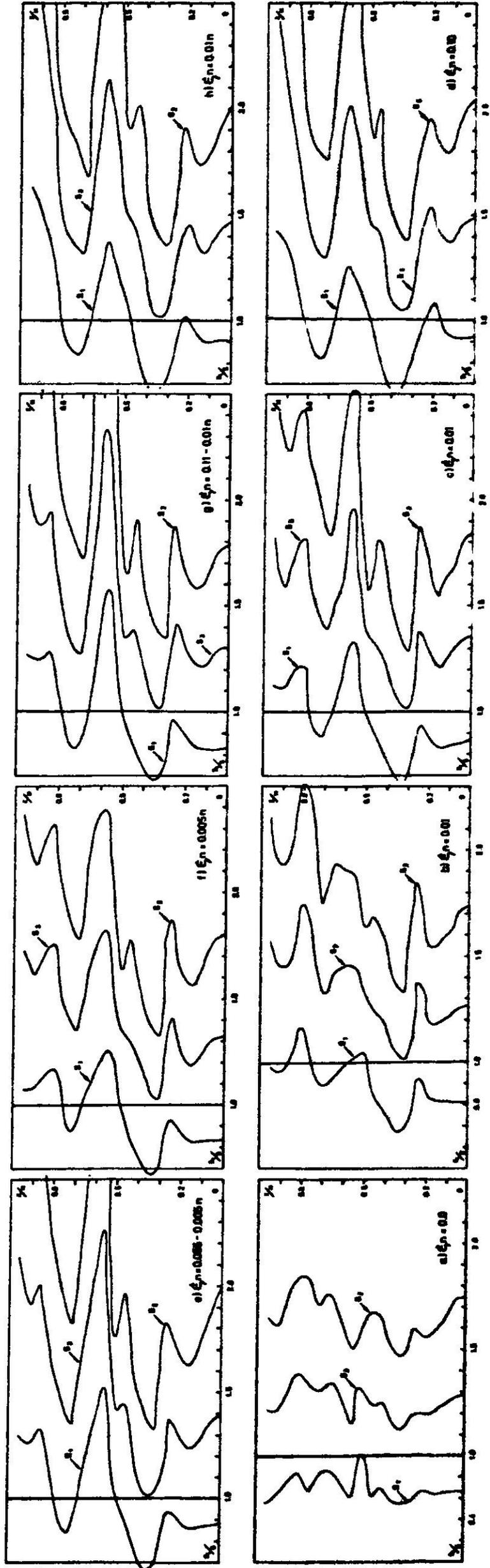


Fig. 41. Momento de flexión.

Fig. 42. Superposiciones modales relativas. Esfuerzo de corte.

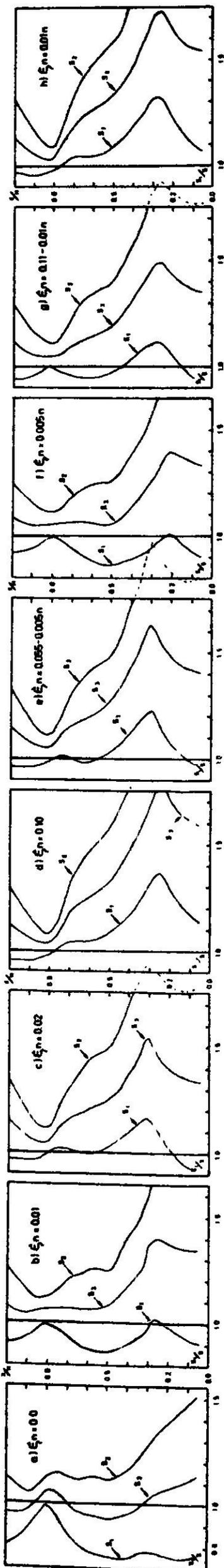


Fig. 43. Superposiciones modales relativas. Desplazamiento.

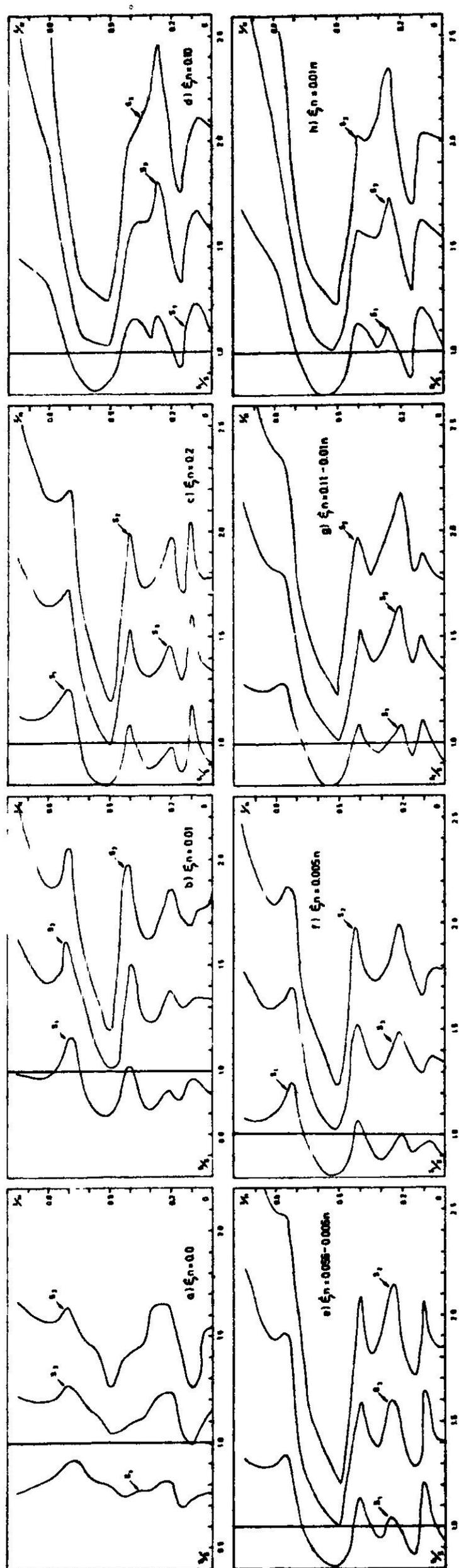


Fig. 44. Superposiciones modales relativas. Momento de flexión.

Terremoto Lima. Enero 1957 (N 82 W). T_1 : 6.0 segundos

$\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

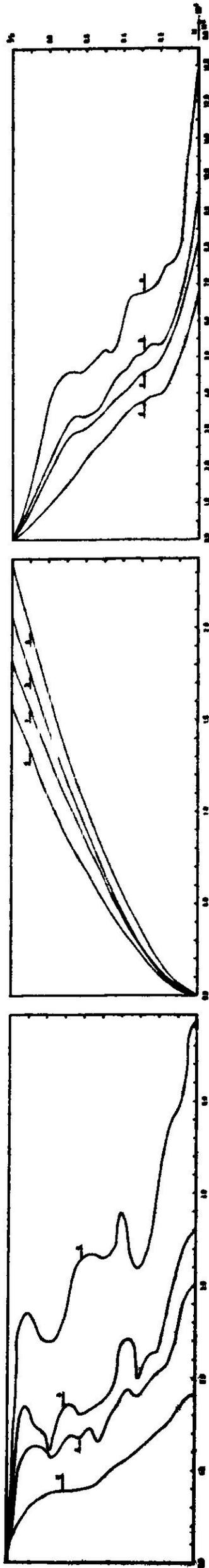


Fig. 45. Esfuerzo de corte.

Fig. 46. Desplazamiento.

Fig. 47. Momento de flexión.

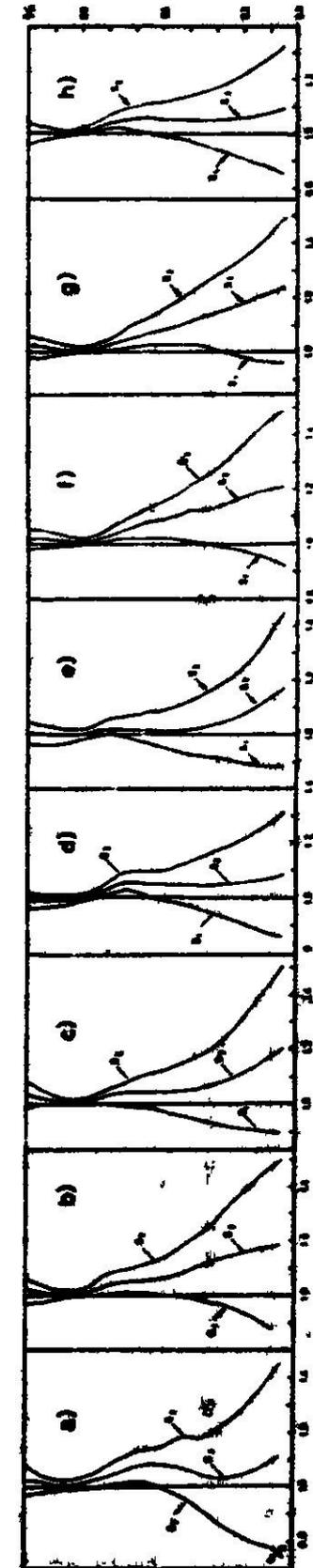
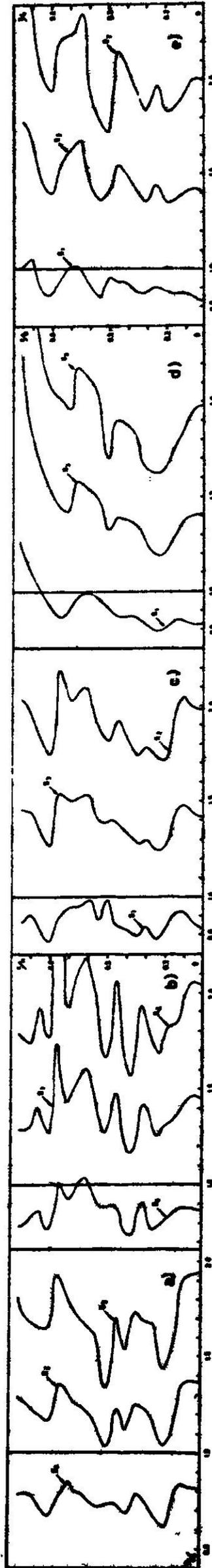


Fig. 48. Superposiciones modales relativas. Esfuerzo de corte.

Fig. 49. Superposiciones modales relativas. Desplazamiento.

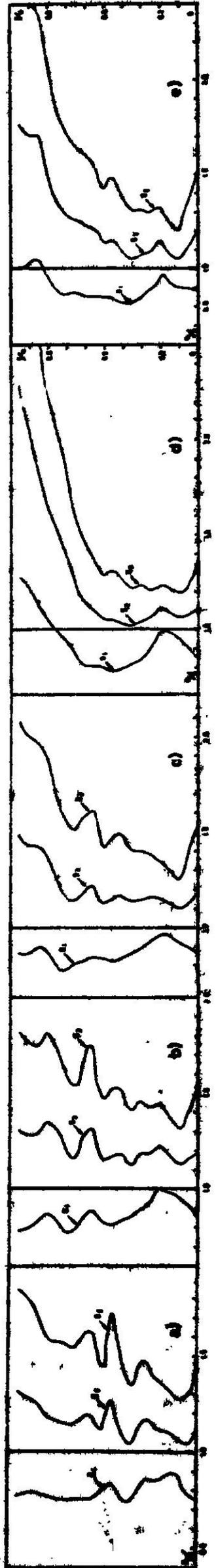


Fig. 50. Superposiciones modales relativas. Momento de flexión.

Terremoto Eureka. Diciembre 1967 (N 79 E). T_1 : 6.0 segundos

$\xi_n =$ a) 0.0; b) 0.01; c) 0.02; d) 0.10; e) 0.055-0.005n; f) 0.005n; g) 0.11-0.01n; h) 0.01n; i) 0.20. (n = 1 a 10).

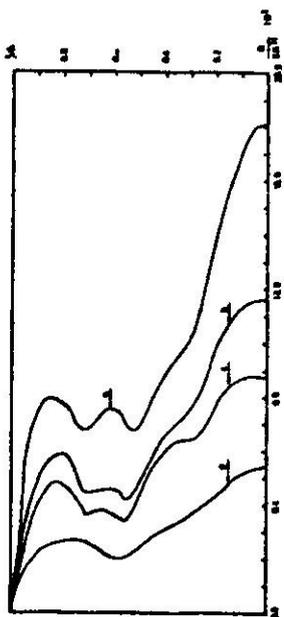


Fig. 51. Esfuerzo de corte.

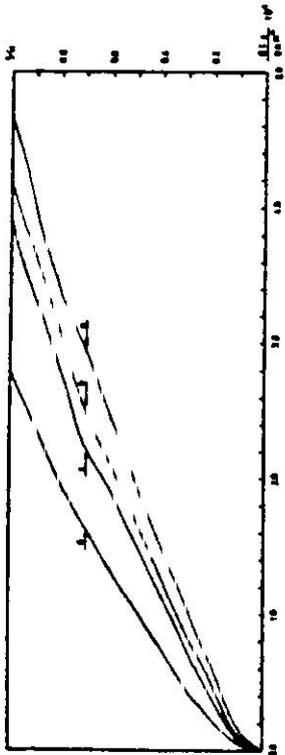


Fig. 52. Desplazamiento.



Fig. 53. Momento de flexión.

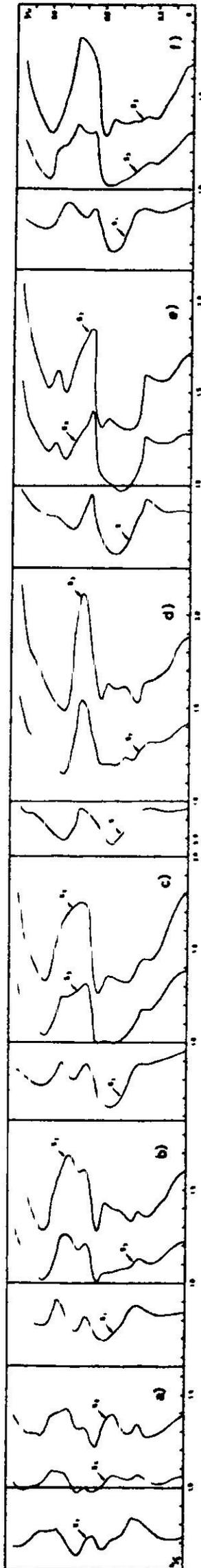


Fig. 54. Superposiciones modales relativas.
Esfuerzo de corte.

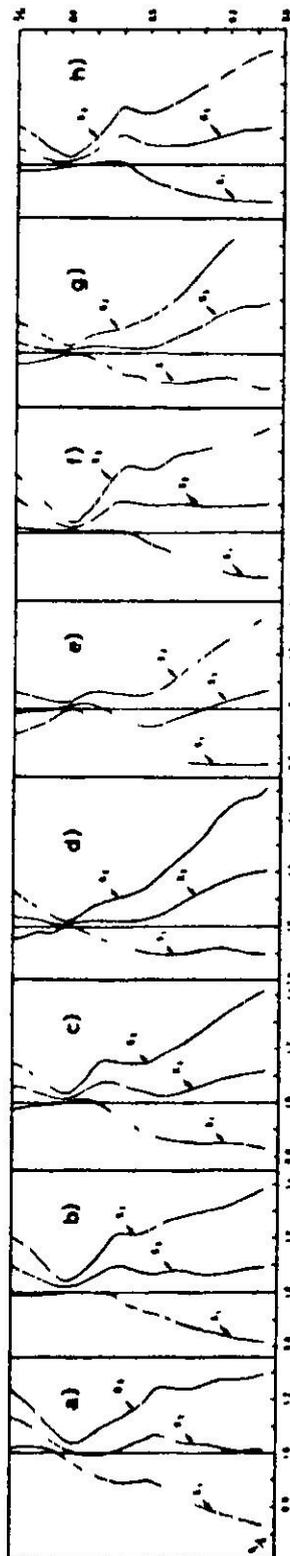


Fig. 55. Superposiciones modales relativas.
Desplazamiento.

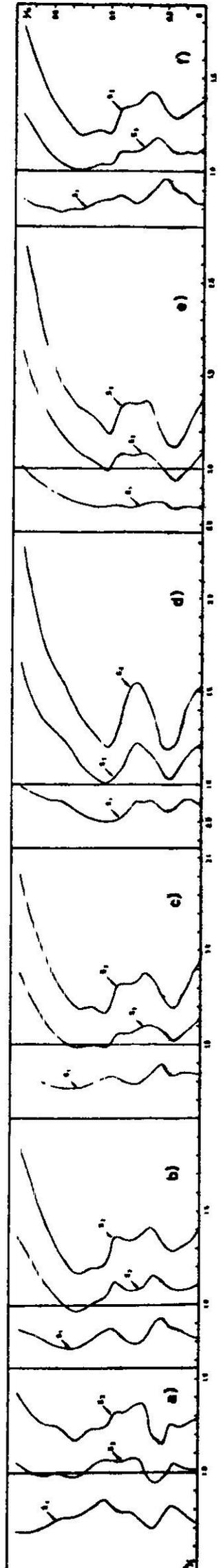


Fig. 56. Superposiciones modales relativas.
Momento de flexión.

grado de amortiguamiento.

De la observación de los gráficos antes mencionados se concluye que el criterio de superposición modal cuadrático S_1 es obviamente inadecuado cuando se considera la estructura no amortiguada. La estimación de la respuesta mejora sensiblemente a medida que aumenta el grado de amortiguamiento, llegando generalmente, para zonas importantes de la estructura, a proporcionar valores mayores a los exactos.

En esta forma resulta claro que no es posible, en general, esperar buenos resultados al tratar de estimar la respuesta exacta mediante una combinación lineal de los criterios de superposición modal S_1 y S_2 y en particular con su promedio S_3 . Los gráficos antes señalados confirman lo recién mencionado.

En las Figs. 3 a 5, 9 a 11, ..., 51 a 53 se ha estudiado en forma gráfica cómo varían con el mecanismo de amortiguación el desplazamiento, esfuerzo de corte y momento de flexión para cada uno de los casos considerados. En estos gráficos se puede observar una fuerte reducción de la respuesta al incrementarse el amortiguamiento escogido.

Revisando los resultados obtenidos en este estudio puede apreciarse que los dos criterios cuadráticos de superposición S_1 y S_4 son realmente coincidentes para todo efecto práctico y por ende, se concluye que al estimar la respuesta de chimeneas uniformes sometidas a terremotos no se gana prácticamente nada con utilizar el criterio de superposición cuadrático modificado S_4 . Bastaría con emplear el criterio de superposición cuadrático original S_1 .

Se puede observar también, que los resultados obtenidos en este trabajo, para el caso no amortiguado, coinciden con los que obtuvieron Husid y Ronnberg^{4,5}.

REFERENCIAS

1. HUSID, R. *Estudio teórico sobre la repartición vertical de fuerzas sísmicas en edificios*. Memoria para optar al título de ingeniero civil, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Santiago, 1960.
2. RUMMAN, W.S. Earthquake Forces in Reinforced Concrete Chimneys. *Journal of the Structural División, ASCE*, (diciembre 1967).
3. MONTES, R. y ROSENBLUETH, E. Cortantes y momentos sísmicos en chimeneas. *Boletín n° 19, Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Ingeniería*. 1968, Lima, Perú.
4. HUSID, R. y RONNBERG, C. Exact response and mode superposition techniques of bending structures with earthquake excitation. *Fourth Symposium on Earthquake*, Roorkee, India, Noviembre 1970.
5. HUSID, R. y RONNBERG, C. The estimation of the exact response of chimneys with earthquake excitation. *Third Japanese Earthquake Engineering Symposium*, Tokyo, Japan, noviembre 1970.
6. HUSID, R. Características de terremotos. Análisis general. *Revista del IDIEM*, vol. 8, n° 1 (1969), pp. 21-42.
7. HUSID, R. *Terremotos: Análisis espectral y características de acelerogramas como base del diseño sísmico*. Editorial Andrés Bello, Edición bilingüe, 448 pp., 1973.

8. ARIAS, A. y HUSID, R. Influencia del amortiguamiento sobre la respuesta de estructuras sometidas a temblor, *Revista del IDIEM*, vol. 1, n° 3 (diciembre 1962), pp. 219-228.
9. HUSID, R., MEDINA, H. y RIOS, J. Análisis de terremotos norteamericanos y japoneses, *Revista del IDIEM*, vol. 8, n° 2 (1969), pp. 55-82.
10. HUSID, R., GUILOFF, R. y ROIZEN, S. Análisis de terremotos chilenos y mexicanos, *Revista del IDIEM*, vol. 8, n° 3 (1969), pp. 121-144.
11. ROSENBLUETH, E. Sobre la Respuesta Sísmica de Estructuras de Comportamiento Lineal, *Ingeniería* (abril 1968), pp. 185-198. Ciudad de México, México.
12. MERCHANT, H.C. y HUDSON, D.E. Mode superposition in multidegree of freedom systems using earthquake response spectrum data, *Bulletin Seismological Society of America*, vol. 52, N° 2 (abril 1962), pp. 405-415.
13. CLOUGH, R.W. Earthquake analysis by response spectrum superposition, *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 52, N° 3 (julio 1962), pp. 647-660.
14. HUSID, R., ROMO, J. y PIEBER, W. Medidas de amortiguamiento en edificios chilenos, *15ª Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, noviembre 1971, Porto Alegre, Brasil.
15. ARIAS, A., HUSID, R. y MONGE, J. Comments on the new chilean seismic code for buildings. *Proceedings Fourth World Conference on Earthquake Engineering*, January 1969, Chile.

**SEISMICAL FORCES IN STRAIGHT CHIMNEYS.
INFLUENCE OF VISCOUS DAMPING IN THE RESPONSE**

SUMMARY:

The influence of damping in the calculation of the response of straight chimneys subjected to actual earthquake spectra at their bases is analysed. Exact expressions were used to figure out the displacements, shear forces and flexural moments as functions of position, time and number of vibration modes. The exact maxima for all of them were calculated for various numbers of vibration modes to find out how rapid the corresponding series converge. In addition, different types of modal superposition were considered to calculate the exact maxima. For all cases three fundamental vibration periods and three actual earthquake spectra together with several distributions of viscous damping as functions of modal number were considered. The main conclusions are: a) that the exact responses are greatly reduced when the degree of the particular damping taken in consideration increases; b) the series are rapidly convergent so that, in general, the first and second terms for displacements, up to the third for flexural moment and up to the fourth for shear force give results accurate enough; c) m.s.r. type of modal superposition is not suitable for undamped structures but it gives much better results as damping degree increases.