VIBRACIONES HORIZONTALES DE UN DISCO RIGIDO SOBRE UN SEMI–ESPACIO ELASTICO

J. Enrique LUCO*

RESUMEN

Se determina el movimiento de un disco rígido ubicado sobre la superficie de un semi-espacio elástico y excitado por una fuerza armónica paralela a la superficie del semi-espacio. Gladwell ha reducido este problema con condiciones de borde mixtas a la solución de un sistema de ecuaciones integrales de Fredholm. En este artículo se presenta una formulación alternativa, basada en el método propuesto por Westmann, que conduce a ecuaciones integrales más apropiadas para una solución numérica y asintótica. Se presenta un desarrollo asintótico de la relación fuerza – desplazamiento, válido para frecuencias bajas, y se comparan los resultados obtenidos por Gladwell y Bycroft.

INTRODUCCION

El problema de las vibraciones horizontales de un disco circular rígido ubicado sobre la superficie de un semi-espacio elástico desempeña un importante papel en el diseño de fundaciones de máquinas, así como en el estudio de la interacción suelo-estructura durante terremotos.

Este es un problema de naturaleza dinámica con condiciones de borde mixtas en el cual las tres componentes del vector desplazamiento están presentes bajo el disco mientras que las tracciones en la superficie del semi-espacio fuera del disco son nulas. El problema así planteado presenta numerosas dificultades, hasta el punto de que sólo el caso estático ha sido resuelto.[1]

*Investigador, Departamento Geofísica, Sismología y Geodesia. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile.

Con el objeto de obtener una solución aproximada, Bycroft[2] supuso que la componente vertical del desplazamiento en toda la superficie del semi-espacio era cero, y además para evitar las condiciones de borde mixtas supuso que las tracciones bajo el disco en el caso dinámico eran proporcionales a las correspondientes tracciones en el caso estático.

Westmann[3], estudiando el caso estático, supuso que la componente normal de la tracción en toda la superficie del semi-espacio era cero. De esta manera, de tres condiciones de borde mixtas se dejan sólo dos. La solución así obtenida se aproxima a la obtenida por Gladwell[1] para el caso estático. La diferencia principal entre ambos resultados está en el tipo de singularidad que se presenta cerca del borde del disco.

Gladwell[4], haciendo uso de los métodos de Busbridge y Noble, redujo el problema dinámico relajado, i.e., suponiendo que la componente normal de la tracción en la superficie del semi-espacio es cero, a la solución de un sistema de dos ecuaciones integrales de Fredholm y obtuvo una solución asintótica válida para frecuencias bajas. Un inconveniente de la solución de Gladwell es que el sistema de ecuaciones integrales por él obtenido resulta inadecuado para una solución numérica además de hacer engorrosa la solución asintótica.

El objetivo de este trabajo es estudiar el mismo problema dinámico relajado pero usando como alternativa el método propuesto por Westmann[5]. De esta manera se reduce el problema a la solución de un sistema de ecuaciones de Fredholm, que tiene la ventaja de prestarse a una solución numérica a la vez que simplifica la solución asintótica.

En el capítulo de ecuaciones básicas se presentan las representaciones integrales de los desplazamientos y tensiones. Estas representaciones son usadas en el capítulo siguiente para reducir formalmente el problema con condiciones de borde mixtas a la solución de un par de ecuaciones integrales de Fredholm. En el capítulo de tensiones de contacto se presentan expresiones para tales tensiones bajo el disco, así como para la fuerza total aplicada, en términos del desplazamiento del disco. Por último, en el capítulo final se obtiene una solución aproximada para frecuencias bajas y se comparan los resultados con aquellos obtenidos por Gladwell y Bycroft.

ECUACIONES BASICAS

En lo que sigue se hará uso de un sistema de coordenadas cilíndricas r, θ, z; el plano $r-\theta$ coincide con la superficie del semi-espacio, estando el eje z dirigido hacia el semi-espacio. El semi-espacio elástico homogéneo e isótropo queda caracterizado por la densidad ρ, el módulo de corte μ y la razón de Poisson σ. El disco rígido de radio a está ubicado en el plano $z = 0$ y su centro coincide con el origen del sistema de coordenadas.

Para oscilaciones de régimen de frecuencia ω, el vector desplazamiento $(u_r, u_\theta, u_z)\ exp\ (i\omega t)$ debe satisfacer las ecuaciones de movimiento de la teoría lineal de la elasticidad en coordenadas cilíndricas. Sezawa[6] ha presentado una solución de estas ecuaciones de movimiento en la cual los desplazamientos en el plano $z = 0$ quedan dados por

$$u_r\ (ar', \theta, 0) = au_r^*\ (r')\cos\theta \tag{1}$$

$$u_\theta\ (ar', \theta, 0) = au_\theta^*\ (r')\ sen\ \theta \tag{2}$$

$$u_z\ (ar', \theta, 0) = au_z^*\ (r')\cos\theta \tag{3}$$

siendo $r' = r/a$. En esta solución

$$u_r^*\ (r') - u_\theta^*\ (r') = \int_o^\infty k\,[F_1\ (k) - C(k)]\,J_o\ (kr')\,dk \tag{4}$$

$$u_r^*\ (r') + u_\theta^*\ (r') = -\int_o^\infty k\,[F_1\ (k) + C(k)]\,J_2\ (kr')\,dk \tag{5}$$

$$u_z^*\ (r') = \int_o^\infty F_2\ (k)\,J_1\ (kr')\,dk \tag{6}$$

en que

$$F_1\ (k) = -A\ (k) + \nu_2\ B(k) \tag{7}$$

$$F_2\ (k) = \nu_1\ A\ (k) - k^2\ B\ (k) \tag{8}$$

$$\nu_1 = (k^2 - \gamma^2\ a_0^2)^{1/2}\ ,\ \nu_2 = (k^2 - a_0^2)^{1/2}\ ,\ a_0 = \omega a\,(\rho/\mu)^{1/2}$$

es una frecuencia adimensional, y $\gamma^2 = (1 - 2\sigma)/2(1 - \sigma)$.
Para representar sólo ondas que se propagan hacia fuera del disco se requiere que $Re\ \nu_1, \nu_2 \geqslant 0$.

Las tensiones $\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{zz}$ en el plano $z = 0$ correspondientes a esta solución son

$$\sigma_{rz}\ (ar', \theta, 0) = \mu\sigma_{rz}^*\ (r')\cos\theta \tag{9}$$

$$\sigma_{\theta z}\ (ar', \theta, 0) = \mu\sigma_{\theta z}^*\ (r')\ sen\ \theta \tag{10}$$

$$\sigma_{zz}\ (ar', \theta, 0) = \mu\sigma_{zz}^*\ (r')\cos\theta \tag{11}$$

en las cuales

$$\sigma_{rz}^*\ (r') - \sigma_{\theta z}^*\ (r') = \int_o^\infty k[F_3\ (k) + \nu_2\,C(k)]\,J_o\ (kr')\,dk \tag{12}$$

$$\sigma^*_{\theta z}(r') + \sigma^*_{\theta z}(r') = -\int_o^\infty k\,[F_3(k) - \nu_2\, C(k)]\, J_2(kr')\, dk \qquad (13)$$

$$\sigma^*_{zz}(r') = \int_o^\infty F_4(k)\, J_1(kr')\, dk \qquad (14)$$

siendo

$$F_3(k) = 2\nu_1\, A(k) + (a_o^2 - 2k^2)\, B(k) \qquad (15)$$

$$F_4(k) = (a_o^2 - 2k^2)\, A(k) + 2\nu_2\, k^2\, B(k) \qquad (16)$$

Las funciones $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ que figuran en estas expresiones serán determinadas imponiendo las condiciones de borde.

OBTENCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

Suponiendo que el disco rígido oscila con un desplazamiento $\Delta exp\,(i\omega t)$ en la dirección $\theta = 0$, resulta que las condiciones de borde relajadas son

$$u_r(ar', \theta, 0) = \Delta\, cos\, \theta, \qquad u_\theta(ar', \theta, 0) = -\Delta\, sen\, \theta \qquad (0 < r' < 1)$$

$$\sigma_{rz}(ar'. \theta, 0) = 0, \qquad \sigma_{\theta z}(ar', \theta, 0) = 0 \qquad (1 < r' < \infty)$$

$$\sigma_{zz}(ar', \theta, 0) = 0 \qquad \text{en todo el plano } z = 0.$$

Considerando las ecuaciones de la sección anterior se encuentra que para satisfacer las condiciones de borde es suficiente que $F_4 = 0$, y que

$$\int_o^\infty k\,[F_1(k) - C(k)]\, J_o(kr')dk = 2\Delta/a \qquad (0 < r' < 1) \quad (17)$$

$$\int_o^\infty k\,[F_1(k) + C(k)]\, J_2(kr')\, dk = 0 \qquad (0 < r' < 1) \quad (18)$$

$$\int_o^\infty k\,[F_3(k) + \nu_2 C(k)]\, J_o(kr')\, dk = 0 \qquad (1 < r' < \infty) \quad (19)$$

$$\int_o^\infty k\,[F_3(k) - \nu_2 C(k)]\, J_2(kr')\, dk = 0 \qquad (1 < r' < \infty) \quad (20)$$

Puesto que $F_4(k) = 0$, de las ecuaciones (16), (7), (8), (15) resulta que

$$B(k) = -\frac{a_o^2 - 2k^2}{2\nu_2 k^2} A(k)$$

$$F_1(k) = -\frac{a_o^2}{2k^2} A(k)$$

$$F_3(k) = \frac{4\nu_1 \nu_2 k^2 - (2k^2 - a_o^2)^2}{2\nu_2 k^2} A(k)$$

Introduciendo las funciones $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$ tales que

$$kF_3(k) = -\frac{2\Delta}{a}\psi_1(k), \qquad k\nu_2 C(k) = \frac{2\Delta}{a}\psi_2(k) \tag{21}$$

resulta

$$kF_1(k) = \frac{2\Delta}{a}[(1-\sigma) + H_1(k)]\, k^{-1}\psi_1(k),$$

$$kC(k) = \frac{2\Delta}{a}[1 + H_2(k)]\, k^{-1}\psi_2(k) \tag{22}$$

siendo

$$H_1(k) = \frac{a_o^2 \nu_2 k}{4\nu_1 \nu_2 k^2 - (2k^2 - a_o^2)^2} - (1-\sigma),$$

$$H_2(k) = \frac{k}{\nu_2} - 1 \tag{23}$$

Al substituir las expresiones (21) y (22) en las ecuaciones (17) – (20), estas últimas se reducen a

$$\int_o^\infty [\psi_1(k) + \psi_2(k)]\, J_2(kr')\, dk = 0 \qquad (1 < r' < \infty) \tag{24}$$

$$\int_o^\infty [(1-\sigma)\psi_1(k) + \psi_2(k)]\, k^{-1} J_2(kr')\, dk = f_2(r') \qquad (0 < r' < 1) \tag{25}$$

$$\int_o^\infty [-\psi_1(k) + \psi_2(k)]\, J_o(kr')\, dk = 0 \qquad (1 < r' < \infty) \tag{26}$$

$$\int_o^\infty [-(1-\sigma)\psi_1(k) + \psi_2(k)]\, k^{-1} J_o(kr')\, dk = f_4(r') \qquad (0 < r' < 1) \tag{27}$$

en que

$$f_2(r') = -\int_o^\infty [H_1(k)\psi_1(k) + H_2(k)\psi_2(k)]\, k^{-1} J_2(kr')\, dk \tag{28}$$

$$f_4(r') = -1 + \int_o^\infty [H_1(k)\,\psi_1(k) - H_2(k)\,\psi_2(k)]\,k^{-1}\,J_o(kr')\,dk \qquad (29)$$

En particular, para el caso estático ($a_o = 0$) se tiene que $H_1(k) = H_2(k) = 0$ y $f_2(r') = 0$, $f_4(r') = -1$. El sistema de ecuaciones integrales duales resultante para este caso coincide con las ecuaciones ya obtenidas por Westmann.[3]

En el caso dinámico ($a_o \neq 0$) es posible reducir formalmente el sistema de ecuaciones integrales duales (24) – (27) a un sistema de dos ecuaciones integrales de Fredholm. Para este objeto se usará el método propuesto por Westmann.[5] De acuerdo con este método la solución formal del sistema (24) – (27) es

$$\psi_1(k) = \frac{1}{2-\sigma}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^{3/2} \int_o^1 [\varphi_1(t)\,J_{-1/2}(kt) + \varphi_2(t)\,J_{3/2}(kt)]\,t^{1/2}\,dt \qquad (30)$$

$$\psi_2(k) = \frac{1}{2-\sigma}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^{3/2} \int_o^1 [-\varphi_1(t)\,J_{-1/2}(kt) + (1-\sigma)\,\varphi_2(t)\,J_{3/2}(kt)]\,t^{1/2}\,dt \qquad (31)$$

en la cual

$$\varphi_1(t) = -\frac{d}{dt}\int_o^t \frac{rf_4(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} \qquad (32)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\sigma}{2(1-\sigma)}\left\{\frac{d}{dt}\int_o^t \frac{rf_4(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} - t^{-1}\int_o^t \frac{rf_4(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) t^{-2}\,\frac{d}{dt}\int_o^t \frac{r^3 f_2(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\right\} \qquad (33)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (28) y (29) y de la integral de Sonine

$$\int_o^t r^{\nu+1}\,J_\nu(kr)\,(t^2-r^2)^{\lambda-1}\,dr = \frac{\Gamma(\lambda)}{2}\left(\frac{2}{k}\right)^{\lambda} t^{\nu+\lambda}\,J_{\nu+\lambda}(kt)\,,$$

$$\lambda > 0, \quad \nu > -1$$

resulta que las ecuaciones (32) y (33) conducen al sistema de ecuaciones integrales de Fredholm

$$\varphi_1(t) + \int_o^1 [K_{11}(t,t')\,\varphi_1(t') + K_{12}(t,t')\,\varphi_2(t')]\,dt' = 1 \qquad (34)$$

$$(1-\sigma)\,\varphi_2(t) + \int_o^1 [K_{21}(t,t')\,\varphi_1(t') + K_{22}(t,t')\,\varphi_2(t')]\,dt' = 0, \qquad (o \leqslant t \leqslant 1) \qquad (35)$$

en que

$$K_{11}(t, t') = \frac{(tt')^{1/2}}{2-\sigma} \int_o^\infty [H_1(k) + H_2(k)]\, J_{-1/2}(kt)\, J_{-1/2}(kt')\, kdk \tag{36}$$

$$K_{12}(t, t') = \frac{(tt')^{1/2}}{2-\sigma} \int_o^\infty [H_1(k)-(1-\sigma)\, H_2(k)]\, J_{-1/2}(kt)\, J_{3/2}(kt')\, kdk \tag{37}$$

$$K_{21}(t, t') = \frac{(tt')^{1/2}}{2-\sigma} \int_o^\infty [H_1(k)-(1-\sigma)\, H_2(k)]\, J_{3/2}(kt)\, J_{-1/2}(kt')\, kdk \tag{38}$$

$$K_{22}(t, t') = \frac{(tt')^{1/2}}{2-\sigma} \int_o^\infty [H_1(k) + (1-\sigma)^2\, H_2(k)]\, J_{3/2}(kt)\, J_{3/2}(kt')\, kdk \tag{39}$$

De esta manera se ha reducido el problema dinámico con condiciones de borde mixtas a la solución del sistema de ecuaciones integrales (34), (35). Una vez que se ha resuelto este sistema, ya sea numéricamente o asintóticamente, es posible calcular todas las componentes del vector de desplazamiento y de la tensión.

Las ecuaciones integrales (34), (35) están definidas en un rango finito para las variables t, t'; en oposición a las ecuaciones integrales obtenidas por Gladwell[4]. Esta característica, más el hecho de que los núcleos $K_{pq}(t, t')$ pueden ser calculados por medio de integrales entre límites finitos, como se verá en el capítulo final, hacen posible la solución numérica y facilitan la solución asintótica del sistema.

TENSIONES DE CONTACTO

Las tensiones de contacto entre el disco y el semi-espacio elástico se obtienen substituyendo en las ecuaciones (12), (13) las expresiones de $F_3(k)$ y $C(k)$ dadas por (21), (30), (31), resultando

$$\sigma^*_{rz}(r)-\sigma^*_{\theta z}(r) = \frac{4\Delta}{(2-\sigma)\pi a}\, \frac{1}{r}\, \frac{d}{dr} \int_r^1 \left[\frac{2\varphi_1(t)-\sigma\varphi_2(t)}{(t^2-r^2)^{1/2}}\, t + \right.$$

$$\left. + \sigma t^{-1} \varphi_2(t)\, (t^2-r^2)^{1/2}\right] dt \tag{40}$$

$$\sigma^*_{rz}(r) + \sigma^*_{\theta z}(r) = -\frac{4\Delta}{(z-\sigma)\pi a}\, r\, \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{t^{-1}\varphi_2(t)}{(t^2-r^2)^{1/2}} \tag{41}$$

La fuerza horizontal total $Pexp\,(i\omega t)$ aplicada al disco en la dirección $\theta = 0$ queda dada por

$$P = -\int_o^{2\pi}\int_o^a (\sigma_{rz}\cos\theta - \sigma_{\theta z}\,sen\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Haciendo uso de (9), (10), (40), resulta

$$P = \frac{8\mu\,\Delta a}{2-\sigma}\int_o^1 \varphi_1(t)\,dt$$

Esta última ecuación permite obtener la relación fuerza-desplazamiento en términos de la frecuencia adimensional a_o y de los parámetros σ, μ y a. Las ecuaciones (40), (41) muestran, después de una integración por partes, que las tensiones de contacto σ_{rz} y $\sigma_{\theta z}$ tienen una singularidad del tipo $(a^2-r^2)^{-1/2}$ en la vecindad del borde del disco, i.e. cuando $r \to a$. Esta singularidad es típica de los problemas de contacto relajados.

SOLUCION APROXIMADA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

Es posible demostrar que los núcleos definidos por las ecuaciones (36) – (39) pueden ser expresados para $t \geqslant t'$ en la siguiente forma

$$K_{11}(t,t') = -i\,\frac{a_o^2(tt')^{1/2}}{4(2-\sigma)}\int_o^1 [G_1(\xi)+G_2(\xi)]\times$$

$$\times\, H^{(2)}_{-1/2}(a_o t\xi)\, J_{-1/2}(a_o t'\xi)\, d\xi \qquad (43)$$

$$K_{12}(t,t') = -i\,\frac{a_o^2(tt')^{1/2}}{4(2-\sigma)}\int_o^1 [G_1(\xi)-(1-\sigma)\,G_2(\xi)]\times$$

$$\times\, H^{(2)}_{-1/2}(a_o t\xi)\, J_{3/2}(a_o t'\xi)\, d\xi \qquad (44)$$

$$K_{21}(t,t') = -i\,\frac{a_o^2(tt')^{1/2}}{4(2-\sigma)}\int_o^1 [G_1(\xi)-(1-\sigma)\,G_2(\xi)]\times$$

$$\times\, H^{(2)}_{3/2}(a_o t\xi)\, J_{-1/2}(a_o t'\xi)\, d\xi \qquad (45)$$

$$K_{22}(t,t') = -i\,\frac{a_o^2(tt')^{1/2}}{4(2-\sigma)}\int_o^1 [G_1(\xi)+(1-\sigma)^2\,G_2(\xi)]\times$$

$$\times\, H^{(2)}_{3/2}(a_o t\xi)\, J_{3/2}(a_o t'\xi)\, d\xi \qquad (46)$$

donde

$$G_1(\xi) = \frac{4\pi(s^2-1)^{1/2}s^2}{F'(s)}\,\delta\,(\xi-s) + \frac{(1-\xi^2)^{1/2}\xi^2}{\Delta_1(\xi)}\,H(\gamma-\xi) +$$

$$+ \frac{(1-\xi^2)^{1/2}(\xi^2-1/2)^2\,\xi^2}{\Delta_2(\xi)}\,H(\xi-\gamma) \tag{47}$$

$$G_2\,(\xi) = \frac{4\,\xi^2}{(1-\xi^2)^{1/2}}$$

$$\Delta_1\,(\xi) = (\gamma^2-\xi^2)^{1/2}\,(1-\xi^2)^{1/2}\,\xi^2 + (\xi^2-1/2)^2$$

$$\Delta_2\,(\xi) = (\xi^2-\gamma^2)\,(1-\xi^2)\,\xi^4 + (\xi^2-1/2)^4 \tag{48}$$

En la ecuación (47), s es la raíz positiva de

$$F(s) = 4s^2\,(s^2-\gamma^2)^{1/2}\,(s^2-1)^{1/2} - (2s^2-1)^2\,,$$

$\delta\,(\xi)$ es la función delta de Dirac y $H\,(\xi)$ es la función de Heaviside.

Las expresiones correspondientes de los núcleos para $t \leqslant t'$ pueden obtenerse de las anteriores considerando las relaciones

$$K_{11}(t,t') = K_{11}(t',t),\; K_{12}(t,t') = K_{21}(t',t),\; K_{22}(t,t') = K_{22}(t',t)$$

Desarrollando los integrandos en las ecuaciones (43) – (46) en potencias ascendentes de a_o, se obtienen expresiones del tipo

$$K_{pq}(t,t') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n\,(a_o)^n}{(n-1)!}\,K_n^{pq}(t,t')\,I_n^{pq}\,, \qquad (p,q=1,2) \tag{49}$$

siendo

$$K_n^{11}(t,t') = \frac{1}{2}\,[(t+t')^{n-1} + |t-t'|^{n-1}] \tag{50}$$

$$K_n^{12}(t,t') = K_n^{21}(t',t) = \frac{1}{2}\left[\frac{(t+t')^n - |t-t'|^n\,sgn\,(t-t')}{nt'} - (t+t')^{n-1} - |t-t'|^{n-1}\right] \tag{51}$$

$$K_n^{22}(t,t') = \frac{1}{2}\left[(t+t')^{n-1} + |t-t'|^{n-1} - \frac{(+t')^{n+1} - |t-t'|^{n+1}}{(n+1)\,tt'}\right] \tag{52}$$

y

$$I_n^{11} = \frac{1}{2\pi(2-\sigma)} \left[A_n + B_n\right] \tag{53}$$

$$I_n^{12} = I_n^{21} = \frac{1}{2\pi(2-\sigma)} \left[A_n - (1-\sigma)\, B_n\right] \tag{54}$$

$$I_n^{22} = \frac{1}{2\pi(2-\sigma)} \left[A_n + (1-\sigma)^2\, B_n\right] \tag{55}$$

En estas últimas ecuaciones

$$A_n = \frac{4\pi\,(s^2-1)^{1/2}\, s^n}{F'(s)} + \int_o^{\gamma} \frac{(1-\xi^2)^{1/2}\,\xi^n}{\Delta_1(\xi)}\, d\xi \, +$$

$$+ \int_{\gamma}^{1} \frac{(1-\xi^2)^{1/2}\,(\xi^2-1/2)^2\,\xi^n}{\Delta_2\,(\xi)}\, d\xi \tag{56}$$

$$B_n = 4 \int_o^1 (1-\xi^2)^{-1/2}\,\xi^n\, d\xi = \frac{n-1}{n}\, B_{n-2} \;,\; B_1 = 4 \;,\; B_2 = \pi \tag{57}$$

Los desarrollos (49) sugieren una solución de las ecuaciones (34), (35) de la forma

$$\varphi_1\,(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_o^n\, \varphi_1^{(n)}\,(t) \;, \quad .\, \varphi^{(o)}\,(t) = 1 \tag{58}$$

$$\varphi_2^{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_o^n\, \varphi_2^{(n)}\,(t) \;, \quad \varphi_2^{(o)}\,(t) = 0 \tag{59}$$

Substituyendo estas expresiones, asi como los desarrollos (49), en las ecuaciones (34), (35), e igualando coeficientes de potencias iguales de a_o, resulta

$$\varphi_1^{(n)}\,(t) = - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-i)^{n-m}}{(n\text{-}m\text{-}1)!} \left[I_{n-m}^{11} \int_o^1 K_{n-m}^{11}\,(t,t')\,\varphi_2^{(m)}\,(t')\,dt' \, + \right.$$

$$\left. + \, I_{n-m}^{12} \int_o^1 K_{n-m}^{12}\,(t,t')\,\varphi_2^{(m)}\,(t')\,dt' \right] \tag{60}$$

$$(1-\sigma)\,\varphi_2^{(n)}\,(t) = - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-i)^{n-m}}{(n\text{-}m\text{-}1)!} \left[I_{n-m}^{21} \int_o^1 K_{n-m}^{21}\,(t,t')\,\varphi_1^{(m)}\,dt' \, + \right.$$

$$\left. + \, I_{n-m}^{22} \int_o^1 K_{n-m}^{22}\,(t,t')\,\varphi_2^{(m)}\,(t')\,dt' \right] , \qquad (n \geqslant 1) \tag{61}$$

Estas relaciones permiten calcular $\varphi_1^{(n)}(t)$, $\varphi_2^{(n)}(t)$ en forma iterativa. En particular

$$\varphi_1^{(1)}(t) = i\, I_1^{11}$$

$$\varphi_1^{(2)}(t) = I_2^{11}\left(\frac{1+t^2}{2}\right) - (I_2^{11})^2$$

$$\varphi_1^{(3)}(t) = -i\, I_3^{11}\left(\frac{1+3t^2}{6}\right) + i\, I_1^{11} I_2^{11}\left(\frac{7+3t^2}{6}\right) - i\,(I_1^{11})^3$$

etc., y

$$(1-\sigma)\,\varphi_2^{(1)}(t) = 0$$

$$(1-\sigma)\,\varphi_2^{(2)}(t) = -I_2^{21}\left(\frac{t^2}{3}\right)$$

$$(1-\sigma)\,\varphi_2^{(3)}(t) = i\,[I_3^{21} - I_2^{21} I_1^{11}]\,\frac{t^2}{3}$$

etc.

Reemplazando estas funciones en (58), (59) se obtiene una aproximación a la solución $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, válida para valores bajos de a_o. Substituyendo a su vez esta aproximación a $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ en (40), (41) se obtiene la variación de las tensiones de contacto con la frecuencia adimensional a_o. De la misma manera se obtiene el desarrollo

$$P = \frac{8\mu\Delta a}{2-\sigma}\left\{[1 + c_2\, a_o^2 + 0\,(a_o^4)] + i\,[c_1\, a_o + c_3\, a_o^3 + 0\,(a_o^5)]\right\} \tag{62}$$

en el cual

$$c_1 = I_1^{11}$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\,[2\,I_2^{11} - 3\,(I_1^{11})^2]$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}\,[I_3^{11} - 4I_1^{11} I_2^{11} + 3\,(I_1^{11})^3]$$

Este desarrollo asintótico de la relación fuerza–desplazamiento coincide con la expresión dada por Gladwell[4] una vez que se corrigen ciertos errores algebraicos que afectan a las ecuaciones (7.3) y (7.4) del artículo mencionado. (Por ejemplo, A_3 debe ser reemplazado por $A_3/2$ en las primeras dos ecuaciones de (7.3) y en la última ecuación de (7.4). En esta última ecuación A_2 debe ser reemplazado por $2A_2$). Los valores numéricos presentados por Gladwell para los coeficientes correspondientes a C_2 y C_3 son erróneos.

Los valores numéricos corregidos de los coeficientes C_1, C_2 y C_3 aparecen en la Tabla I.

TABLA I

VALORES DE LOS COEFICIENTES C_1, C_2, C_3.

σ	C_1	C_2	C_3
0	0.664	−0.066	0.029
1/4	0.597	−0.048	0.022
1/3	0.580	−0.042	0.021
1/2	0.557	−0.033	0.020

Con el objeto de comparar con la solución obtenida por Bycroft[1], la ecuación (62) se escribe en la forma

$$\Delta = \frac{2-\sigma}{8}\,\frac{P}{\mu a}\left[\left\{ d_o + d_2 a_o^2 + 0(a_o^4) \right\} - i \left\{ d_1 a_o + d_3 a_o^3 + 0(a_o^5) \right\}\right] \tag{63}$$

en que $d_o = 1$, y los restantes coeficientes están dados en la Tabla II. En la misma tabla se indican los coeficientes dados por Bycroft. Es conveniente indicar que ambos resultados difieren aún en el caso estático ($a_o = 0$) si $\sigma \neq 1/2$, dadas las diferentes hipótesis usadas para simplificar el problema de condiciònes de borde mixtas.

TABLA II

COMPARACION DE RESULTADOS

σ	d_0		d_1		d_2		d_3	
	Luco	Bycroft	Luco	Bycroft	Luco	Bycroft	Luco	Bycroft
0	1.000	0.875	0.664	0.451	−0.375	−0.216	−0.176	−0.086
1/4	1.000	0.889	0.597	0.494	−0.308	−0.240	−0.133	−0.097
1/3	1.000	0.975	0.580	0.517	−0.294	−0.252	−0.126	−0.102
1/2	1.000	1.000	0.557	0.566	−0.277	−0.278	−0.116	−0.113

REFERENCIAS

1. GLADWELL, G.M.L. A contact problem for a circular cylindrical punch in adhesive contact with an elastic half–space: The case of rocking and translation parallel to the plane. *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 7 (1969), pp. 295–307.
2. BYCROFT, G.N. Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi–infinite elastic half–space and on elastic stratum. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, sec. A, vol. 248 (1956), pp. 327–368.
3. WESTMANN, R.A. A symmetric mixed boundary–value problem of the elastic half–space. *J. Appl. Mech.*, vol. 32 (1965), pp. 411–417.
4. GLADWELL, G.M.L. Forced tangential and rotary vibration of a rigid circular disc on a semi–infinite solid. *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 6 (1968), pp. 591–607.
5. WESTMANN, R.A. Simultaneous pairs of dual integral equations. *SIAM Review*, vol. 7, nº 3 (1965), pp. 341–348.
6. SEZAWA, K. Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution. *Bull. Earth. Res. Inst. Tokyo*, vol. 6, nº 2 (1929).

HORIZONTAL VIBRATIONS OF A RIGID CIRCULAR PLATE ON A SEMI–INFINITE ELASTIC HALF–SPACE

SUMMARY:

The problem of determining the motion of a rigid circular disc placed on the surface of an elastic half–space and excited by a harmonic force parallel to the surface of the half–space is considered. Gladwell reduced this mixed–boundary value problem to the solution of two coupled Fredholm integral equations. An alternative formulation, based on the method of Westmann is used here to obtain integral equations allowing more convenient numerical and asymptotic solutions. An asymptotic expansion of the force–displacement relationship is presented for low values of the dimensionless frecuency, and the results compared with those of Gladwell.