

Principios básicos del cálculo asísmico

En varias ocasiones se han publicado en estos «Anales» algunos estudios que exponen los principios del cálculo dinámico de las construcciones asísmicas.

No obstante esos trabajos de verdadero interés, creemos que no es del todo ocioso volver brevemente sobre esas mismas materias con el solo intento de acentuar algunos conceptos que a nuestro juicio guían mejor el criterio, simplifican la cuestión o señalan más claramente el procedimiento general aplicable a tal sollicitación dinámica.

1.—Los sismógrafos manifiestan que en realidad es extremadamente complicado el movimiento de un punto del suelo sacudido por un recio temblor, porque la aceleración, dirección y sentido de dicho movimiento cambian constantemente de manera caprichosa y brusca. Las construcciones ligadas a esa porción del terreno se hallan compelidas así, durante el fenómeno sísmico, a sufrir las más variadas e irregulares oscilaciones que causan las consiguientes deformaciones y tensiones, más o menos considerables, en el material.

A fin de hacer posible el estudio de esas deformaciones y tensiones, precisa adoptar alguna ley aproximada para el movimiento sísmico. Con tal propósito se admite generalmente:

a) La acción más peligrosa se debe a los desplazamientos horizontales del suelo, que son los de mayor importancia;

b) Durante los breves instantes destructivos del temblor, esos desplazamientos horizontales del suelo pueden considerarse como oscilaciones de un movimiento *armónico simple*.

Lo que sigue corresponde a esta hipótesis.

2.—Como es sabido, una masa m , animada con un *movimiento armónico simple*, oscila de acuerdo con la ecuación:

$$y = r \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} \quad (1)$$

en la cual:

y es la distancia a que se halla m de su posición inicial al cabo del tiempo t .

r es la cantidad llamada *amplitud* del movimiento oscilatorio de m y es igual al valor máximo de y .

T Es el período de movimiento, o tiempo que requiere m para volver a pasar por la misma posición con la misma velocidad. Es pues T la duración de una oscilación completa o lo que tarda m en recorrer cuatro veces la amplitud r .

Según (1), cuando la masa m se encuentra a la distancia y lleva la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} r \cos \frac{2\pi t}{T}$$

y la aceleración j :

$$j = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} r \sin \frac{2\pi t}{T} = -\frac{4\pi^2}{T^2} y$$

Entre la amplitud, el período y la aceleración *máxima* del movimiento armónico simple se verifica, en consecuencia, la relación:

$$T^2 j_{\text{máx}} = -4\pi^2 r \quad (1 A)$$

3.—El hecho que una masa m posea cierta aceleración j significa que sobre esa masa actúa la *fuerza efectiva* mj . Por consiguiente, cuando el movimiento es armónico simple, la masa móvil m está sometida a la fuerza efectiva:

$$F_e = m \frac{d^2y}{dt^2} = -m \frac{4\pi^2}{T^2} y = -K y \quad (2)$$

siendo
$$K = m \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (2 A)$$

Como se ve, K equivale a la fuerza capaz de imponer a la masa m un desplazamiento igual a la unidad.

Aplicaremos frecuentemente la conclusión (2) de que *en toda masa m , animada con un movimiento armónico simple, actúa la fuerza $-Ky$ que es proporcional en cada instante al desplazamiento de dicha masa*. Bajo la acción de tal fuerza, tiende constantemente m a volver a su posición inicial de reposo.

4.—Recíprocamente, partiendo de esa sola condición de proporcionalidad para la fuerza efectiva F_e se llega a la ecuación (1) del movimiento vibratorio elástico, puesto que tendremos:

$$F_e = -Ky = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Con $y = 0$ para $t = 0$, la integral de esa expresión es:

$$y = r \operatorname{sen} t \sqrt{K:m}$$

en la cual r es una constante igual a y máximo. Esta ecuación representa un movimiento periódico: el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del móvil vuelven a tener los mismos valores cada vez que

$$t \sqrt{K:m}$$

aumenta en 2π . En consecuencia, el período T de la oscilación es:

$$T = 2\pi \sqrt{m:K}$$

De donde:

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Se obtiene así de nuevo la ecuación (1). *Es pues la misma cosa expresar que el movimiento de m es armónico simple o establecer que la masa está solicitada por la fuerza efectiva*

$$F_e = -Ky = -m \frac{4\pi^2}{T^2} y$$

5.—Admitiendo que el movimiento sísmico del suelo es armónico simple, tendremos que un muro aislado, una chimenea o una columna, por ejemplo, sacudidos por un temblor, serán comparables con una pieza elástica sometida a un movimiento oscilatorio forzado. Como se sabe, en tal caso de vibración forzada bien pronto la pieza oscila con el período que se le impone, y cada punto de ella se desplazará en conformidad con la ecuación (1).

Las amplitudes r no son iguales, como lo veremos, para los diversos puntos del eje de la pieza y sus valores dependen, no sólo de la amplitud y período del temblor, sino también de las dimensiones, peso y cualidades elásticas del sólido.

Las cantidades que deben adoptarse para la amplitud y para el período del temblor (o para su aceleración máxima) varían según la región geográfica y según la naturaleza del terreno. Generalmente esas magnitudes están impuestas por las Ordenanzas oficiales que las fijan en concordancia con la estadística sísmica del país.

Si designamos por α , λ y T , respectivamente la *aceleración máxima*, la *amplitud* y el *período del temblor*, se obtiene de (1 A) y (2 A) las siguientes relaciones:

$$-\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{K}{m} \quad (3)$$

Tiene muy frecuente aplicación el cociente $\varepsilon = \alpha : g$ llamado *coeficiente sísmico*, en el cual g es la aceleración de la gravedad.

Adoptando el *metro* y el *segundo* como unidades, resulta:

$$\varepsilon = - \frac{4 \pi^2 \lambda}{g T^2} = - \frac{39,48}{9,8} \frac{\lambda}{T^2} \quad (3 A)$$

sea:

$$\varepsilon T^2 = - 4,03 \lambda \quad (3 B)$$

Conocidas dos de las magnitudes ε , T y λ queda determinada la tercera.

6. NOTACIONES.—Para agruparlas en un solo sitio de más fácil consulta y evitarnos repetir constantemente la misma explicación, conviene establecer que usaremos, siempre con el mismo significado, los siguientes símbolos en las ecuaciones:

m = masa;

g = aceleración de gravedad;

α = aceleración máxima del temblor;

λ = amplitud del temblor.

ε = coeficiente sísmico;

T = período, en segundos, del temblor;

T_0 = período, en segundos, de la vibración libre de una pieza;

$\theta = T_0 : T$;

l = longitud de la pieza;

p = peso propio de la pieza por unidad de longitud;

P = carga o peso concentrado;

E = módulo de elasticidad del material;

I = momento de inercia de la sección respecto al eje neutro;

M = momento de flexión;

Q = esfuerzo de corte;

$$K = m \frac{4 \pi^2}{T^2} \quad K_r = \frac{p}{g} \frac{4 \pi^2}{T^2} = \frac{\varepsilon p}{\lambda} \quad n^4 = \frac{K_r}{E I}$$

$$S = \text{sen } nl \quad s = \text{sen } nx \quad C = \cos nl \quad c = \cos nx$$

$$S' = \text{senh } nl \quad s' = \text{senh } nx \quad C' = \cosh nl \quad c' = \cosh nx$$

7.—Apliquemos las observaciones preliminares anteriores al estudio de algunos elementos de construcción. Sea en primer término la columna o muro aislado OA (fig. 1). Supongamos que dicho sólido, por la acción de un temblor, está animado con un movimiento forzado armónico simple, a virtud del cual de la posición de reposo OA pasa a ocupar otras diferentes posiciones, tales como O_1A_1 , O_2A_2 , etc.

Refiriéndonos a los ejes coordenados OX y OY, contemos en ellos como positivas las magnitudes hacia arriba y hacia la izquierda, en conformidad con la usual

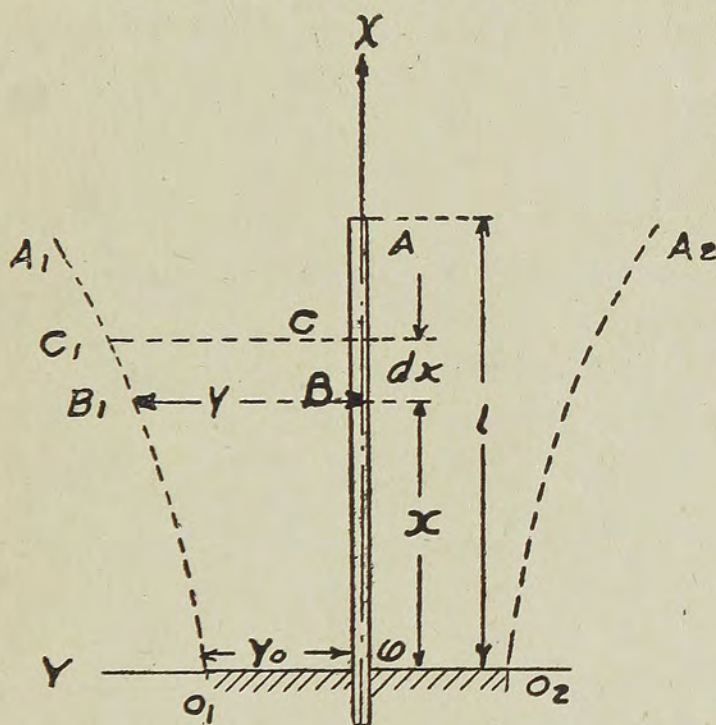
convención adoptada cuando se dibuja la pieza horizontalmente con su extremo libre a la derecha.

Un elemento material B se ha desplazado en la cantidad y y cuando el sólido ocupa la posición O_1A_1 . Por efecto del movimiento, el trozo de la pieza situado *encima* de una sección ejerce sobre ésta un esfuerzo horizontal que supondremos positivo y un momento que será negativo (los verdaderos signos resultarán de las ecuaciones de equilibrio que vamos a establecer). Tomados con signos contrarios, esos esfuerzos representarán también la acción del trozo *inferior* de la pieza sobre la misma sección.

Consideremos un elemento BC , de masa m , comprendido entre dos secciones infinitamente próximas.

Designando por Q la acción horizontal de B_1A_1 sobre la sección B_1 y por M el momento de esa acción, los esfuerzos análogos Q' y M' desarrollados en C_1 por el trozo C_1A_1 tendrán como valor absoluto:

$$Q' = Q + \frac{dQ}{dx} dx \quad (4) \quad M' = M + \frac{dM}{dx} dx$$



En su movimiento, el elemento en cuestión tendrá cierta aceleración; y la magnitud de la fuerza efectiva que la causa, es según (2):

$$F_e = m \frac{d^2y}{dt^2} = -Ky$$

Por lo tanto, esta fuerza efectiva $-Ky$ viene a ser la resultante de todas las acciones y ligazones que obrando sobre B_1C_1 producen su movimiento efectivo.

En otros términos, la fuerza efectiva tomada con signo contrario (fuerza o reacción de inercia $+Ky$), forma un sistema en equilibrio con los referidos esfuerzos exteriores y ligazones que actúan sobre el elemento B_1C_1 (Principio de d'Alembert).

En consecuencia, tal sistema en equilibrio es el de la fig. 2.

Siendo p el peso propio de la columna por unidad de longitud, tenemos para el elemento B_1C_1 :

$$m = \frac{p}{g} dx \quad k = \frac{p}{g} \frac{4\pi^2}{T^2} dx$$

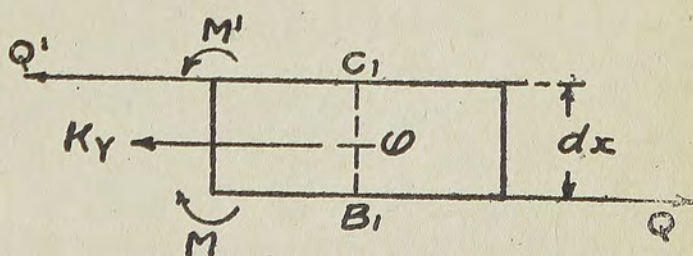


FIG. 2

Introduciendo los valores (4) se obtiene con las ecuaciones de equilibrio (de

rotación respecto de O y de traslación horizontal), suprimiendo los infinitamente pequeños de segundo orden:

$$\frac{dM}{dx} = -Q \quad (5)$$

$$dQ = -Ky = -\frac{p}{g} \frac{4\pi^2}{T^2} y \, dx \quad (5 A)$$

La relación (5) es exacta para la situación de equilibrio estático; pero sólo es aproximadamente verdadera en el estado de movimiento, porque no se ha tomado en consideración el par de inercia debido a la rotación en las secciones transversales de la pieza.

Para las aplicaciones que tenemos en vista, puede despreciarse la influencia de ese par; y puesto que deben ser muy pequeños los valores aceptables para las flechas de la deformación elástica ($y - y_0$), podemos también prescindir de los momentos suplementarios que desarrollaría el peso propio como carga vertical.

La deformación elástica del eje de la pieza nos da:

$$M = EI \frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

Derivando dos veces y considerando (5) y (5 A):

$$\frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3y}{dx^3} = -Q$$

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{dQ}{dx} = \frac{p}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} y$$

Haciendo para simplificar:

$$n^4 = \frac{p 4 \pi^2}{g T^2 EI} \quad (6)$$

se tiene:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - n^4 y = 0 \quad (7)$$

ecuación diferencial de cuarto orden cuya solución general es:

$$y = A_1 e^{nx} + A_2 e^{-nx} + A_3 \cos nx + A_4 \sin nx \quad (8)$$

8.—Las expresiones (7) y (8) son generales, cualesquiera que sean las ligazones o condiciones de las secciones extremas de la pieza, puesto que al deducir esas relaciones no intervino ninguna hipótesis al respecto. El extremo inferior puede pues estar o considerarse empotrado, semiempotrado o articulado, según sea el caso; y el superior hallarse también sujeto con ligazones análogas. Estas condiciones deberán ser tomadas en consideración para determinar las constantes de (8).

Las tensiones máximas corresponden a la mayor deformación, o sea, a $y_0 = \lambda$ para $x=0$. Esta será, por consiguiente, una de las condiciones que debemos introducir.

9.—Consideremos nuevamente la pieza del § 7 tratándola en forma muy poco diferente para que se manifieste con más claridad el procedimiento sencillo, de aplicación general, que relaciona la sollicitación dinámica con los casos ordinarios de flexión para cargas estáticas. En vez de estudiar un elemento BC de la fig. 1, tomemos el trozo comprendido entre el extremo superior A, supuesto libre, y otra sección cualquiera como O, por ejemplo.

Repitiendo los razonamientos del § 7 veremos que el movimiento de ese trozo, causado por los esfuerzos exteriores que actúan en su base, sería también producido por las fuerzas efectivas $-Ky$ aplicadas a cada elemento dx del trozo, supuesto desligado de la base. Por consiguiente, esas fuerzas efectivas tomadas con signo contrario (reacciones de inercia $+Ky$) forman un sistema de equilibrio con los esfuerzos exteriores que actúan en la base.

En la pieza prismática que estudiamos tiene K un valor constante K_1 por unidad de longitud, cuyo valor es:

$$K_1 = \frac{p 4 \pi^2}{g T^2}$$

La reacción de inercia de cada elemento dx de la pieza es entonces $K_1 y dx$. Según esto, la situación estática de OA será la representada por la fig. 3, en la cual $O_1 A_1$ es la elástica de OA, llamando elástica al eje de la pieza en la nueva forma y posición que tendrá cuando sufre el máximo de desplazamiento por efecto del temblor.

Se desprende de lo anterior que si la pieza es de sección invariable, bastará multiplicar por la constante K_1 el área comprendida entre el eje primitivo y la elástica para tener la carga de la sollicitación estática que haría experimentar a la pieza las mismas deformaciones que las causadas por la acción dinámica del temblor.

Cuando la sección no es constante, K_1 varía con ella.

Con la fig. 3 la cuestión queda convertida a los casos corrientes de la estática.

10.—Tratemos la sollicitación estática de la fig. 3.

Para evitar confusiones que suelen ocurrir, especialmente cuando intervienen los coeficientes diferenciales derivados de la elástica, tomaremos siempre los esfuerzos de corte Q y los momentos de flexión M con los signos que le corresponden en el trozo de longitud x de la pieza (signos contrarios a los del trozo $l - x$), refiriéndonos a los ejes coordenados OX y OY de la fig. 3.

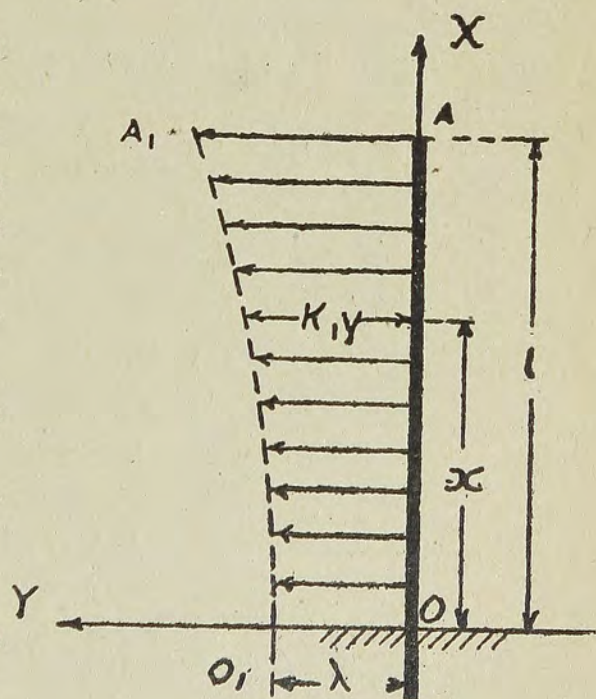


FIG. 3

Así tenemos:

$$Q_0 = K_1 \int_0^1 y \, dx$$

$$Q_x = Q_0 + K_1 \int_0^x y \, dx = EI \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = K_1 y$$

Esta ecuación diferencial es la misma (7) obtenida antes más laboriosamente; y pudimos escribirla inmediatamente, puesto que es conocida esa expresión de estática que da la carga por unidad de longitud $K_1 y$, en el punto de abscisa x , cuando las fuerzas solicitantes son todas normales al eje OA, como ocurre en la fig. 3. La solución analítica del caso estudiado en las figs 1 y 3, es pues la ecuación (8).

11.—Con respecto a esa solución (8), observemos que el empleo de las funciones hiperbólicas ofrece mayor comodidad. Las Tablas que dan sus valores son comunes y se encuentran aún en los manuales de ingenieros (V. Hütte), reemplazando las potencias de e por esas funciones en la ecuación (8) resultan las constantes de integración expresadas en forma más sencilla.

Así la ecuación (8) queda:

$$y = B_1 \cosh nx + B_2 \sinh nx + B_3 \cos nx + B_4 \sin nx \quad (9)$$

Puesto que para la pieza considerada (figs. 1 ó 3) son nulos M y Q en la sección libre extrema A, se tiene como condiciones que determinan las constantes:

$$\text{Para } x=0: \quad y = \lambda \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{Para } x = 1: \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = 0 \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{Q}{EI} = 0$$

Las derivadas de (9) para introducir en ellas esas condiciones, son:

$$\frac{dy}{dx} = n (B_1 \sinh nx + B_2 \cosh nx - B_3 \sin nx + B_4 \cos nx) \quad (10)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = n^2 (B_1 \cosh nx + B_2 \sinh nx - B_3 \cos nx - B_4 \sin nx) \quad (11)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{Q}{EI} = n^3 (B_1 \sinh nx + B_2 \cosh nx + B_3 \sin nx - B_4 \cos nx) \quad (12)$$

Denotemos más sencillamente por las mayúsculas acentuadas C' y S' , respectivamente el coseno y el seno *hiperbólico* de nl ; por iguales letras sin acento el coseno y el seno *trigonométrico* de la misma cantidad, e introduciendo las condiciones establecidas, se obtiene:

$$B_1 = \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{SS'}{1 + CC'} \right) \quad (13)$$

$$B_2 = -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{SC' + CS'}{1 + CC'} \quad (14)$$

$$B_3 = \lambda - B_1 \quad (13 A) \quad B_4 = -B_2 \quad (14 A)$$

Análogamente, representando, para abreviar, por las minúsculas acentuadas c' y s' el coseno y el seno *hiperbólico* de nx y por c y s su coseno y seno *trigonométrico*, las ecuaciones (9) a (12), quedan, introduciendo las equivalencias (13 A) y (14 A):

$$y_x = B_1 (c' - c) + B_2 (s' - s) + \lambda c \quad (15)$$

$$\frac{dy}{dx} = n [B_1 (s' + s) + B_2 (c' - c) - \lambda s] \quad (16)$$

$$M_x = n^2 EI [B_1 (c' + c) + B_2 (s' + s) - \lambda c] \quad (17)$$

$$Q_x = n^3 EI [B_1 (s' - s) + B_2 (c' + c) + \lambda s] \quad (18)$$

12.—Determinado con las expresiones (6), (13) y (14) los valores de n y de las constantes, las ecuaciones (15) a (18) darán y , M y Q para una sección cualquiera.

Podemos así conocer las deformaciones y tensiones elásticas producidas en la pieza por el temblor. Esas magnitudes cambiarán de signo para la posición $0_2 A_2$ de extrema derecha, porque entonces λ es negativo.

Las expresiones citadas demuestran que para una pieza dada los valores de y , M y Q (y por consiguiente las tensiones) resultan proporcionales a λ y, en consecuencia, son también proporcionales al producto αT^2 .

Para $x = 0$, los senos s y s' son nulos, e iguales a la unidad los cosenos c y c' ; luego, de las ecuaciones (17) y (18) se obtiene:

$$M_0 = n^2 EI (2 B_1 - \lambda) = n^2 EI \lambda \frac{SS'}{1 + CC'}$$

$$Q_0 = n^3 EI \times 2 B_2 = -n^3 EI \lambda \frac{C'S + CS'}{1 + CC'}$$

Para $x = l$, resulta de (15) como expresión de la flecha o desplazamiento del extremo libre:

$$f = \lambda \frac{C + C'}{1 + CC'}$$

En el § 14 se indica la manera de simplificar estos cálculos.

13.—Manifiestan las expresiones (13) a (18) que las constantes, las flechas, los momentos y los esfuerzos de corte se hacen infinitos si se verifica:

$$1 + CC' = 0$$

o sea, cuando:

$$\cos nl \cdot \cosh nl = -1 \quad (19)$$

Cuando se realiza esa condición, se produce el sincronismo o resonancia, en que el período T del temblor coincide con el período de la vibración propia o libre de la pieza. Por consiguiente, podemos obtener el período de la vibración libre por medio de la expresión (19). Naturalmente, se llega también a esa misma ecuación si se determinan las constantes B como se indicó en el § 11 pero haciendo ahora $\lambda = 0$ para $x = 0$, lo que equivale a suprimir la causa que, imponiéndole un determinado período, hacía forzado el movimiento oscilatorio de la columna.

La ecuación (19) se satisface con una serie de soluciones tales como:

$$\begin{array}{ll} n_0 l = 1,8751 & \text{(fundamental)} \\ n_1 l = 4,6944 & \text{(1.º armónico)} \\ n_2 l = 7,8548 & \text{(2.º armónico), etc.} \end{array}$$

Introduciendo esos valores en la ecuación (6) obtendremos los diversos períodos $T_0, T_1, \dots$ de la vibración libre o natural de la pieza. Como se dijo, cuando el período T del temblor es igual a uno cualquiera de los períodos $T_0, T_1, \dots$, se verificará la relación (19) y la flecha crecerá indefinidamente si el sincronismo se mantiene algún tiempo.

Para el mayor de esos períodos propios o naturales, llamado período *fundamental*, resulta:

$$T_0^2 = \frac{4 \pi^2 p}{EIg} \left(\frac{1}{1,875} \right)^4$$

o sea:

$$T_0 = 1,787 l^2 \sqrt{\frac{p}{EIg}}$$

Y tomando como unidades el *metro* y el *segundo*:

$$T_0 = 0,5708 l^2 \sqrt{\frac{p}{EI}} \quad (20)$$

El período fundamental y el primero armónico están, por consiguiente, en la razón:

$$\frac{T_0}{T_1} = \left(\frac{4,6944}{1,8751} \right)^2 = 6,27$$

14.—Relacionando el período fundamental T_0 de la vibración libre del sólido con el período T adoptado para el temblor en la ecuación (6), tendremos, llamando θ la razón entre esos dos períodos:

$$\theta = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{nl}{1,8751} \right)^2$$

De donde:

$$nl = 1,8751 \sqrt{\theta} \quad (21)$$

El valor de nl queda pues determinado por la razón que exista entre el período fundamental T_0 de la pieza y el período T del temblor.

La relación (21) permite simplificar el cálculo de y , M y Q . En efecto, con las ecuaciones (15) a (18), para diversos valores de θ , pueden construirse cuadros numéricos, como la tabla I que insertamos en el § 15, con las magnitudes de:

$$\frac{y}{\lambda} = \eta \quad \frac{M}{n^4 EI l^2 \lambda} = \beta \quad \frac{Q}{n^4 EI l \lambda} = \alpha$$

Pero según (6) y (3):

$$n^4 EI = - \frac{\varepsilon p}{\lambda}$$

Este último miembro resulta siempre positivo, porque ε y λ son de signos contrarios. Luego, con la magnitud positiva de ε impuesta por la Ordenanza, y tomando en el cuadro respectivo de la Tabla I los valores numéricos que hemos designado por η , β , α , obtendremos:

$$y = \lambda \eta \quad M = \varepsilon p l^2 \cdot \beta \quad Q = \varepsilon p l \cdot \alpha$$

15.—Comienza la tabla I con el cuadro relativo a $T_0 : T = 0$. Resulta este cociente cuando $T_0 = 0$, lo que indica EI igual a infinito, o sea, una pieza de rigidez perfecta. En estas condiciones, el sólido no se deforma; su movimiento es sólo de traslación; todos los puntos se desplazan la misma cantidad y llevan en cada instante igual aceleración.

Los valores numéricos dados por la Tabla I para $T_0 : T = 0$ corresponden pues al caso en que se supone para todos los puntos del sólido una misma aceleración igual a la máxima del temblor (coeficiente sísmico ε).

Siendo datos ε , T , p , l , para utilizar la tabla I bastará determinar T_0 con la ecuación (20), lo que nos dará el cociente $T_0 : T = \theta$ con el cual recogeremos los valores necesarios del cuadro respectivo.

TABLA I.—Caso de la fig. 1

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\lambda}$	$\frac{M}{\varepsilon p l^2}$	$\frac{Q}{\varepsilon p l}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\lambda}$	$\frac{M}{\varepsilon p l^2}$	$\frac{Q}{\varepsilon p l}$
1	$T_0 : T = 0$			1	$T_0 : T = 0,3$		
0,0	1	0,500	—1,0	0,0	1,000	0,545	—1,060
0,2	1	0,320	—0,8	0,2	1,011	0,353	—0,859
0,4	1	0,180	—0,6	0,4	1,037	0,202	—0,655
0,6	1	0,080	—0,4	0,6	1,070	0,094	—0,454
0,8	1	0,020	—0,2	0,8	1,113	0,026	—0,225
1,0	1	0,000	—0,0	1,0	1,148	0,000	0,000
$T_0 : T = 0,5$				$T_0 : T = 0,7$			
0,0	1,000	0,648	—1,205	0,0	1,000	0,928	—1,592
0,2	1,035	0,428	—1,003	0,2	1,100	0,630	—1,384
0,4	1,124	0,249	—0,788	0,4	1,354	0,377	—1,141
0,6	1,244	0,114	—0,551	0,6	1,700	0,178	—0,838
0,8	1,378	0,030	—0,289	0,8	2,090	0,047	—0,459
1,0	1,517	0,000	0,000	1,0	2,494	0,000	0,000
$T_0 : T = 0,9$				$T_0 : T = 1,1$			
0,0	1,000	2,398	—3,615	0,0	1,000	—2,065	2,526
0,2	1,429	1,698	—3,385	0,2	0,433	—1,542	2,687
0,4	2,546	1,054	—2,996	0,4	—1,055	—1,004	2,638
0,6	4,086	0,516	—2,339	0,6	—3,146	—0,511	2,225
0,8	5,838	0,141	—1,348	0,8	—5,555	—0,145	1,359
1,0	7,653	0,000	0,000	1,0	—8,048	0,000	0,000

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\lambda}$	$\frac{M}{\epsilon p l^2}$	$\frac{Q}{\epsilon p l}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\lambda}$	$\frac{M}{\epsilon p l^2}$	$\frac{Q}{\epsilon p l}$
1	$T_0 : T = 1,3$			1	$T_0 : T = 1,5$		
0,0	1,000	-0,589	0,492	0,0	1,000	-0,299	0,091
0,2	0,769	-0,471	0,677	0,2	0,839	-0,261	0,281
0,4	0,146	-0,324	0,774	0,4	0,390	-0,191	0,408
0,6	-0,746	-0,172	0,717	0,6	-0,270	-0,106	0,422
0,8	-1,786	-0,051	0,465	0,8	-1,044	-0,031	0,291
1,0	-2,872	0,000	0,000	1,0	-1,868	-0,000	0,000
$T_0 : T = 2$				$T_0 : T = 3$			
0,0	1,000	-0,089	-0,205	0,0	1,000	+0,011	-0,369
0,2	0,901	-0,111	-0,011	0,2	0,977	-0,043	-0,169
0,4	0,590	-0,097	0,141	0,4	0,788	-0,057	+0,007
0,6	0,091	-0,060	0,212	0,6	0,332	-0,043	0,125
0,8	-0,525	-0,019	0,170	0,8	-0,301	-0,015	0,130
1,0	-1,181	0,000	0,000	1,0	-1,007	0,000	0,000
$T_0 : T = 5$				$T_0 : T = 6$			
0,0	1,000	+0,106	-0,698	0,0	1,000	0,477	-2,452
0,2	1,388	-0,012	-0,468	0,2	3,824	0,017	-2,040
0,4	1,684	-0,081	-0,150	0,4	7,187	-0,287	-0,892
0,6	1,121	-0,073	0,184	0,6	5,796	-0,324	+0,523
0,8	-0,304	-0,030	0,239	0,8	-0,855	-0,139	1,081
1,0	-2,112	0,000	0,000	1,0	-10,104	0,000	0,000

Interpolación en la Tabla precedente.—Para magnitudes intermedias de $T_0 : T = \theta$ inferiores a 2, se obtienen los valores correspondientes de η , β , o α interpolando sobre U y no con respecto a θ . La función U es la dada por la ecuación (27A) del § 18 y está calculada en la Tabla II (§ 19).

De esa manera, el valor de η (que corresponde a θ), intermedio entre otros dos conocidos η_1 y η_2 que respectivamente corresponden a θ_1 y θ_2 , será:

$$\eta = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1) \frac{U - U_1}{U_2 - U_1}$$

Si se desea, por ejemplo, determinar para la sección $x:l = 0,2$ los valores que corresponden a $\theta = 1,7$, intermedio entre $\theta_1 = 1,5$ y $\theta_2 = 2$ que se hallan en la Tabla, tendremos (V. Tabla II):

$$U_1 = -0,800$$

$$U = -0,529$$

$$U_2 = -0,333$$

$$\frac{U - U_1}{U_2 - U_1} = 0,58$$

$$\eta = 0,839 + 0,58 (0,901 - 0,839) = 0,875$$

$$\beta = -0,261 + 0,58 (-0,111 + 0,261) = -0,174$$

$$\alpha = 0,281 + 0,58 (-0,011 - 0,281) = 0,112$$

Con el procedimiento de interpolación indicado, la solución resulta con tres decimales exactas para β y α . Puede variar ligeramente para η la tercera decimal cuando θ está comprendido entre 1,5 y 2. Si θ es mayor que 2 las diferencias de la interpolación aumentan rápidamente. Disminuyendo los intervalos, es decir, aumentando el número de cuadros entre $\theta = 2$ y $\theta = 5$, se podría emplear la interpolación directa sobre θ .

16.—De la inspección de la Tabla I, o de las gráficas de sus valores, se obtienen las siguientes conclusiones, suponiendo λ positivo:

a) Cuando $\theta < 1$. Para todas las secciones de la pieza las flechas y los momentos de flexión son positivos y los esfuerzos de corte son negativos. Los máximos de M y de Q ocurren en la base de la columna o muro. El desplazamiento máximo se verifica en la sección extrema superior. A medida que crece θ aumentan también η , β y α .

b) Si $\theta > 1$. Las flechas pueden ser positivas o negativas según el valor de x . El máximo absoluto de la flecha tiene lugar en el extremo superior y es negativo. Los esfuerzos de corte son positivos siempre que θ no sea mayor que 1,6 y entonces el valor máximo de Q corresponde a la sección en que $y = 0$. Si $\theta > 1,6$ los valores de Q pueden ser positivos en ciertas secciones y negativos en otras. El máximo positivo de Q siempre tiene lugar en la sección en que $y = 0$ y el máximo negativo se halla para $x = 0$.

Respecto de los momentos se observa que son negativos si $\theta < 2,8$ y su valor máximo resulta para $x = 0$ o para la sección de $Q = 0$ cuando hay esfuerzos de corte de uno y otro signo.

Si θ es superior a 2,8 los momentos varían de signo según el valor de x . Entonces el mayor valor positivo de M se produce en la base y el máximo negativo en la sección que da $Q = 0$. En este caso de momentos positivos y negativos, la curva de los M corta al eje de la pieza y en esta sección de momento nulo la elástica tendrá un punto de inflexión pasando de una curvatura a la otra de signo contrario.

Para $\theta = 6$ se nota un súbito aumento de las deformaciones y de los esfuerzos porque dicho valor de θ indica que la pieza se halla muy próxima al caso de resonancia con su primer período armónico. Esta resonancia se verificaría con $T = T_1$, lo que según vimos en el § 13 corresponde $\theta = T_0 : T = 6,27$. Por análoga causa, la misma rápida elevación de los esfuerzos y flechas se verifica cuando se pasa de $\theta = 0,7$ a $\theta = 0,9$ y de $\theta = 1,3$ a $\theta = 1,1$, cercanías del sincronismo con $\theta = 1$.

Llamemos M' y Q' el momento y el esfuerzo de corte máximos, respectivamente, obtenidos por el método llamado estático (o sea suponiendo la aceleración uniforme para todos los puntos del sólido: caso de $\theta = 0$); y sean M y Q análogos esfuerzos máximos dados por la Tabla I (método dinámico).

No considerando valores de θ mayores de 5 se halla:

$$M' > M \quad \text{para } \theta > 1,35 \quad \text{aproximadamente.}$$

$$Q' > Q \quad \text{» } \theta > 1,20 \quad \text{»}$$

PILA O MURO QUE SOPORTA UNA CARGA P (FIG. 4)

17.—Supongamos por ahora que al deformarse el pilar por efecto del temblor, la sección extrema A puede girar en torno de su eje neutro, ya sea porque la carga P gira también o porque existe una efectiva articulación en A cuando a P sólo le es posible desplazarse horizontalmente.

Admitamos también, como primer caso, que el peso propio de la pila es despreciable en comparación de P . Entonces es nulo K_1 entre O y A . La sollicitación estática, equivalente a la dinámica (§ 9), queda así reducida a la fuerza F , igual a la reacción de inercia del movimiento de P . Si suponemos que esa fuerza está realmente aplicada en A (como en el caso de la articulación antes mencionada), tendremos:

$$F = K f$$

(22)

En esa expresión

$$K = \frac{P}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\varepsilon P}{\lambda}$$

Para esta situación corriente de flexión con carga concentrada estática F , la flecha máxima es:

$$f - \lambda = \frac{F l^3}{3EI} = \frac{K l^3 f}{3EI}$$

Luego:

$$f = \frac{3EI\lambda}{3EI - Kl^3} \quad (23)$$

Introduciendo este valor en (22):

$$F = \frac{3EIK\lambda}{3EI - Kl^3} \quad (24)$$

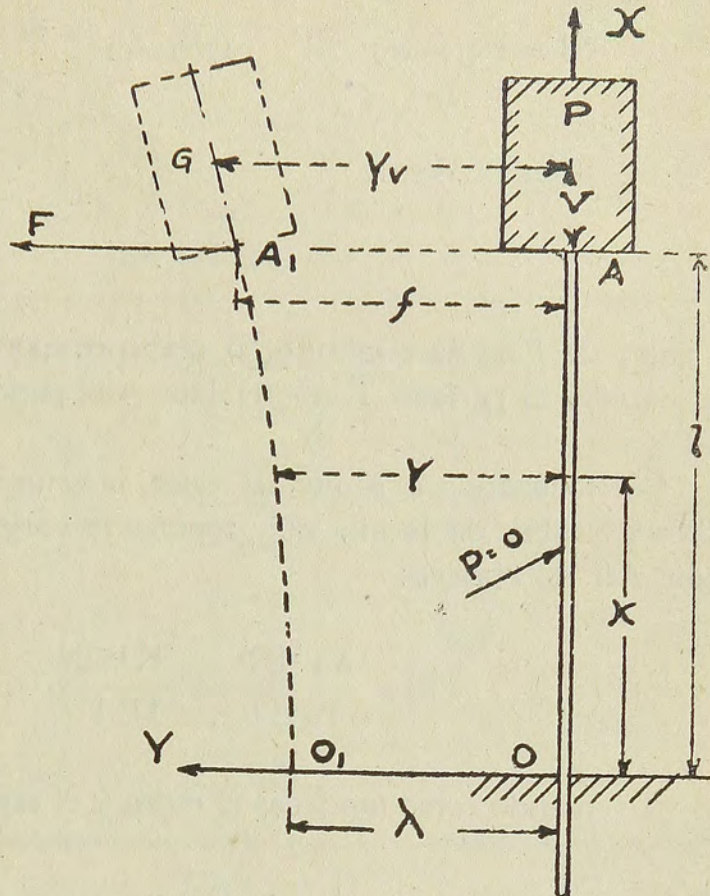


FIG. 4

Determinado así F , se obtendrán el momento de flexión, el esfuerzo de corte y la flecha en una sección cualquiera por medio de las expresiones conocidas:

$$M = F(1-x) \quad Q = -F \quad y - \lambda = \frac{F x^2 (3 - x)}{6EI}$$

18.—Cuando ocurre

$$3EI = Kl^3 \quad (25)$$

el valor de F se hace infinito, lo que corresponde al caso de sincronismo, en el que son iguales el período T del temblor y el período T_0 de la vibración libre del pilar.

Reemplazando a K por su valor, la ecuación (25) dará el período T_0 de la vibración libre de la pila que soporta la carga P y cuyo peso propio se supone nulo. Así se obtiene:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 Pl^3}{3gEI} = \frac{Kl^3 T^2}{3EI} \quad (26)$$

Y tomando como unidades el *metro* y el *segundo*:

$$T_0 = 1,16 \sqrt{\frac{Pl^3}{EI}} \quad (26A)$$

Llamando θ la razón de T_0 con el período T del temblor, se tiene:

$$\theta^2 = \frac{T_0^2}{T^2} = \frac{Kl^3}{3EI} = \frac{\epsilon Pl^3}{3EI\lambda} \quad (27)$$

Si hacemos para simplificar:

$$U = \frac{1}{1-\theta^2} = \frac{3EI}{3EI - Kl^3} \quad (27A)$$

las ecuaciones (24) y siguientes quedan, tomando ϵ con su valor positivo:

$$F = K\lambda U = \epsilon PU$$

$$y = \lambda \left[1 + \frac{x^2(3-x)}{2l^3} (U-1) \right] \quad f = \lambda U \quad (28)$$

$$M_x = \epsilon P(1-x) U \quad M_0 = \epsilon PlU \quad (29)$$

$$Q = -\epsilon PU \quad (30)$$

19.—Se facilitan los cálculos con el auxilio de una Tabla como la siguiente que da los valores de U para diversos θ .

El procedimiento consiste en determinar θ con la ecuación (27); recoger el valor de U en la Tabla II e introducirlo en las expresiones (28) a (30).

TABLA II.—Caso de la fig. 4

θ	U	θ	U	θ	U
0,0	1,000	1,1	—4,762	2,5	—0,190
0,1	1,010	1,2	—2,273	3,0	—0,125
0,2	1,042	1,3	—1,449	3,5	—0,089
0,3	1,099	1,4	—1,042	4,0	—0,067
0,4	1,190	1,5	—0,800	5,0	—0,042
0,5	1,333	1,6	—0,641	6,0	—0,029
0,6	1,563	1,7	—0,529	10,0	—0,010
0,7	1,961	1,8	—0,446		
0,8	2,778	1,9	—0,383		
0,9	5,263	2,0	—0,333		

20.—Si se supusiera que el movimiento de P se efectúa con la misma aceleración α del temblor, se tendría como fuerza horizontal de inercia:

$$F' = \varepsilon P = \lambda K$$

Según las ecuaciones (23) y (27) siempre que se tenga $\theta^2 < 2$ (o $\theta < 1,414$) resultará el valor absoluto de f mayor que λ y, por consiguiente

$$F > F'$$

La igualdad $F = K \lambda$ o $f = \lambda$ sólo se verifica estrictamente cuando el pilar es de rigidez perfecta, es decir, cuando $E I$ es infinito o $\theta = 0$.

Como lo manifiesta la Tabla II, en el caso de la fig. 4 ya con $\theta = 0,1$ la diferencia relativa entre f y λ es sólo del 1%.

21.—Imaginemos que manteniendo constantes las otras características de la pieza hacemos variar solamente el valor de $E I$ en las expresiones del § 18. Se verá que si aumenta $E I$, los valores de T_0 y de U disminuyen, aproximándose este último a la unidad. En el límite, con $E I$ infinito, se tiene $\theta = 0$ y

$$U = 1 \quad f = \lambda \quad F = \varepsilon P \quad M_0 = \varepsilon P l \quad (31)$$

Entonces y $\lambda = 0$, es decir, el pilar no sufre deformación elástica. Por consiguiente, cuando la rigidez de la pieza es infinitamente grande, su movimiento osci-

latorio consiste en desplazamientos del pilar paralelamente a si mismo de modo que todos sus puntos, incluso P , poseen la misma aceleración del suelo.

En el caso de la fig. 4, si se supone que P se mueve con la misma aceleración del temblor, se llega a las expresiones (31). El valor de U viene a ser, por lo tanto, el coeficiente con que se multiplican las magnitudes dadas por (31) cuando se toma en cuenta la verdadera aceleración que adquiere P a causa de la flexibilidad del pilar.

A la inversa, si suponemos que $E I$ vaya disminuyendo, observaremos que θ aumenta y que U se hace negativo, disminuyendo su valor absoluto, tendiendo a cero. En el límite, se harán nulos f , M_0 y F . Según esto, cuando $E I$ es sumamente pequeño relativamente con $P l^3$, la pila será incapaz de transmitir ningún movimiento oscilatorio apreciable a la masa P .

En los casos a que venimos refiriéndonos, o sea, cuando $E I : l^3$ es pequeño, el pilar puede hallarse en inaceptables condiciones como pieza cargada de punta; y esa sería su verdadera sollicitación peligrosa. El esfuerzo de compresión P actuaría con la excentricidad $f - \lambda$.

22.—*Cuando se considera v en la fig. 4.*—En el pilar de dicha figura la carga P puede representar el peso de una masa rígidamente unida al soporte $O A$ y la distancia v del centro de gravedad de la masa al extremo A puede ser una magnitud que sea necesario tomar en cuenta. Entonces hay que considerar aplicada en G la reacción de inercia del movimiento de P .

Designemos esa reacción de inercia por F_v y supongamos que la masa o construcción representada por P es indeformable durante la oscilación del pilar y que puede girar junto con la sección A .

El desplazamiento del centro de gravedad de P será entonces:

$$y = f + v \tan \omega$$

siendo $\tan \omega$ el coeficiente angular $dy : dx$ de la elástica del pilar en su extremo A .

Con las condiciones establecidas se halla sucesivamente:

$$K = \frac{P}{g} \frac{4 \pi^2}{T^2} = \frac{\epsilon P}{\lambda}$$

$$Q_x = -F_v$$

$$M_x = F_v (l + v - x)$$

$$\tan \omega = \frac{F_v l}{E I} \left(\frac{1}{2} + v \right)$$

$$y_x - \lambda = \frac{F_v x^2 [3 (l + v) - x]}{6 E I}$$

$$y_v - \lambda = \frac{F_v [(l + v)^3 - v^3]}{3 E I}$$

$$F_v = K y_v = \frac{3 E I K \lambda}{3 E I - K [(l + v)^3 - v^3]}$$

Para el período de la vibración libre resulta:

$$3EI = K[(1+v)^3 - v^3]$$

$$T_o^2 = \frac{4\pi^2 P[(1+v)^3 - v^3]}{3EIg}$$

$$\theta^2 = \frac{T_o^2}{T^2} = \frac{K[(1+v)^3 - v^3]}{3EI}$$

Y haciendo:

$$U = \frac{1}{1-\theta^2} = \frac{3EI}{3EI - K[(1+v)^3 - v^3]}$$

se obtiene como en el § 18:

$$F_v = K\lambda U = \varepsilon P U \quad y_v = \lambda U$$

$$M_x = \varepsilon P(1+v-x)U \quad Q_x = -\varepsilon P U$$

23.—*Acción horizontal de P y de p.*—(fig. 4).—Cuando se toma también en cuenta el peso propio en el pilar de la fig. 4, es fácil ver que se obtiene la misma ecuación diferencial (7) y por consiguiente las mismas expresiones (9) a (12).

Las condiciones para determinar las constantes de integración son las mismas dadas en el § 11 salvo la última que para $x = l$ ahora debe ser

$$Q = EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -F = -Kf$$

Recordando la ecuación (6) podemos escribir:

$$K = \frac{P}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{Pn^4 EI}{p}$$

En consecuencia las condiciones que debemos introducir en las ecuaciones (9) a (12) son:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1) Con $x = 0$, $y = \lambda$ | lo que da $B_1 + B_3 = \lambda$ |
| 2) » $x = 0$, $dy : dx = 0$ | » $B_2 + B_4 = 0$ |
| 3) » $x = l$ $d^2 y : dx^2 = 0$ | » $B_1 C' + B_2 S' = B_3 C + B_4 S$ |

4) con $x = 1$

$$\frac{d^3 \lambda}{dx^3} = -\frac{P}{p} n^4 f$$

Introduciendo esta última condición en (12) y en (9), resulta:

$$n^3 (B_1 S' + B_2 C' + B_3 S - B_4 C) = -\frac{P n^4}{p} (B_1 C' + B_2 S' + B_3 C + B_4 S)$$

Haciendo para simplificar:

$$R = \frac{P n}{p}$$

se obtiene:

$$B_1 = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1 + CC' + SS' + 2RCS'}{1 + CC' - R(C'S - CS')}$$

$$B_2 = -\frac{\lambda}{2} \frac{CS' + C'S + 2RCC'}{1 + CC' - R(C'S - CS')}$$

$$B_3 = \lambda - B_1$$

$$B_4 = -B_2$$

Bastará llevar esos valores a las mismas ecuaciones (15) a (18) para determinar y , M , Q .

Para la sección O de la base del pilar (fig. 4), se tiene:

$$M_o = n^2 E I (2 B_1 - \lambda).$$

$$Q_o = n^3 E I \times 2 B_2.$$

Y la flecha en A es:

$$f = B_1 (C' - C) + B_2 (S' - S) \times \lambda C$$

Del valor de n dado por la ecuación (6), se deduce:

$$R = \frac{P n}{p} = \frac{P}{p} \sqrt[4]{\frac{\epsilon p}{\lambda E I}}$$

tomando el valor positivo de ϵ .

24.—ACCIÓN HORIZONTAL DE P Y DE p CON DOBLE EMPOTRAMIENTO. Fig. 5.

En un edificio, P puede representar la carga que un piso transmite al pilar o muro. Cuando en la figura 5 se admite que el piso P sólo se mueve horizontalmente y que es suficientemente rígido, puede entonces considerarse que hay también empotramiento en A . En ese caso la sección A se desplaza horizontalmente sin girar.

Tratándose de una pieza con sus dos extremos empotrados, las constantes de integración de las ecuaciones (9) a (12) son las mismas del § 23 que precede, reemplazando sólo la tercera condición por la siguiente:

$$3) \text{ Para } x=1 \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

lo que da:

$$B_1 S' + B_2 C' = B_3 S - B_4 C$$

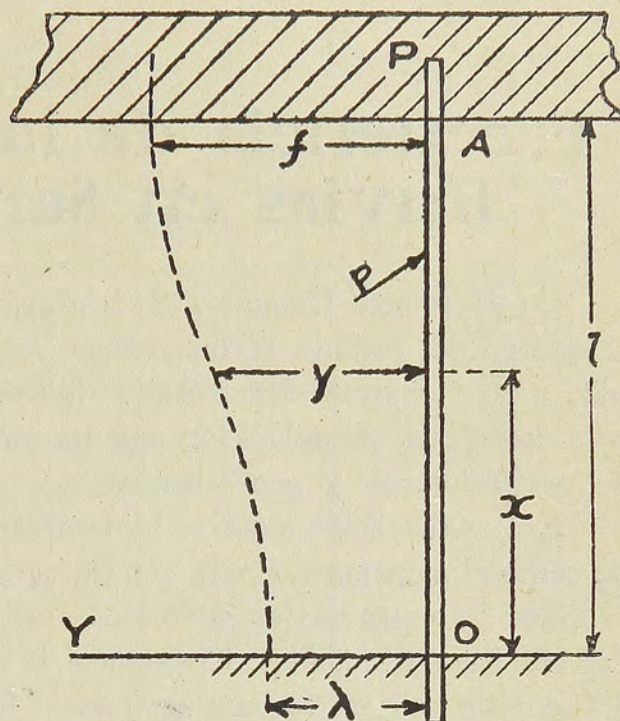


FIG. 5

Con las indicadas condiciones se obtiene para el caso de la fig. 5:

$$B_1 = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{2 C' S + R (C C' + S S' - 1)}{C' S + C S' + R (C C' - 1)}$$

$$B = - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{2 S S' + R (C S' + C' S)}{C' S + C S' + R (C C' - 1)}$$

$$B_3 = \lambda - B_1 \quad B_4 = - B_2$$

Tales son las constantes que deben introducirse en las ecuaciones (15) a (18) para el caso del doble empotramiento de la fig. 5, para el cual también se encuentra:

$$M_0 = n^2 E I (2 B_1 - \lambda)$$

$$Q_0 = 2 B_2 n^3 E I.$$

$$f = B_1 (C' - C) + B_2 (S' - S) + \lambda C$$